

Όψεις κριτικής αποτίμησης του σχολικού βιβλίου μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου: το εγχειρίδιο υποστηρίζει δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας;

Γιώργος Καραβασίλης¹, Γιώργος Κόσυβας²

gkaravasilis@sch.gr, gkosyvas@gmail.com

¹Μαθηματικός στη Δ/θμια Εκπαίδευση & Έκτακτος καθηγητής στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας,

²Μαθηματικός στη Δ/θμια Εκπαίδευση & Συντονιστής Εκπαίδευσης Λονδίνου

Περίληψη. Η παρούσα εργασία πραγματεύεται ορισμένες όψεις της αξιολόγησης του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου που συνδέονται με τη διερεύνηση της ενσωμάτωσης δραστηριοτήτων υψηλής γνωστικής βαρύτητας. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της κριτικής αποτίμησης, το εν λόγω εγχειρίδιο υπηρετεί το Πρόγραμμα Σπουδών με επιστημονική επάρκεια και εγκυρότητα. Ωστόσο, σε ένα σημαντικό αριθμό δραστηριοτήτων κυριαρχεί η απομνημόνευση χρηστικών κανόνων και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων, ενώ η ανάπτυξη ικανοτήτων διερεύνησης, επιχειρηματολογίας και συλλογισμού που παρακινούν τους μαθητές να αναπτύξουν θεμελιώδεις μαθηματικές διεργασίες για την επίτευξη υψηλών στόχων μάθησης απουσιάζουν ή έρχονται σε δεύτερη μοίρα. Η εν λόγω εργασία επιχειρεί να συμβάλει στον ευρύτερο επιστημονικό διάλογο για τη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Λέξεις κλειδιά: Σχολικά βιβλία μαθηματικών, κριτική αποτίμηση, δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας, επίλυση προβλήματος.

Κριτική αποτίμηση των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών στο Γυμνάσιο

Οι ερευνητές εδώ και πολλά χρόνια συμφωνούν ότι τα σχολικά εγχειρίδια ασκούν ισχυρή επίδραση στο μαθηματικό περιεχόμενο που μαθαίνουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία στην τάξη (Schmidt et al., 2002; Perin, 2008; Hudson et al., 2010). Τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών υποστηρίζουν την εφαρμογή του εκάστοτε Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών, τον σχεδιασμό της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού και καλούνται να προετοιμάζουν τους μελλοντικούς πολίτες για έναν μεταβαλλόμενο κόσμο (Eisner, 1987; Ringel, 2000). Καταβάλλεται ιδιαίτερη μέριμνα ώστε το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών να παρουσιάζεται με ισορροπία και πληρότητα, ακρίβεια και λογική συνοχή, επιστημονική ορθότητα και εγκυρότητα, και να οδηγεί στην επίτευξη των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων και των στόχων που σκιαγραφούνται από το Πρόγραμμα Σπουδών (Κολέζα, 2006; 2007α). Εκτίθεται σε αυτά ένα σώμα βασικών επιστημονικών γνώσεων και αλληλοσυνδεόμενων διδακτικών δραστηριοτήτων που διευκολύνουν την κατανόηση και εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών (Haggarty & Perin, 2002).

Οι δραστηριότητες με τις οποίες καταγίνονται οι μαθητές στην τάξη βρίσκονται στην καρδιά της διδασκαλίας των μαθηματικών. Μια μαθηματική δραστηριότητα είναι καλή όταν έχει σαφή και ρεαλιστικό στόχο και αποτελεί για τους μαθητές πρόκληση για σκέψη και διερεύνηση. Ο βαθμός της πρόκλησης και η γνωστική βαρύτητα των μαθηματικών

διεργασιών καθορίζουν τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών. Τα σχολικά βιβλία διαδραματίζουν ζωτικό ρόλο στη δραστηριοποίηση των μαθησιακών κινήτρων και την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Pepin, 2008; Hudson et al., 2010). Παρότι τα κίνητρα επηρεάζουν τις διαθέσεις και τις στάσεις των μαθητών για τα μαθηματικά, τα σχολικά εγχειρίδια συχνά απέχουν από τους προβληματισμούς, τα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες τους με αποτέλεσμα οι μαθητές να τα αποστρέφονται και να μην εκδηλώνουν ερευνητική περιέργεια γι' αυτά.

Σε πολλές χώρες οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν μαθηματικά στηριζόμενοι στα εγχειρίδια και μάλιστα περισσότερο από τα άλλα μαθήματα του Προγράμματος Σπουδών (Robitaille & Travers, 1992; Reys et al., 2004; Stein & Kim, 2009). Τα διδακτικά εγχειρίδια προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς το μαθηματικό περιεχόμενο που θα διδάξουν, καθορίζουν τη διαδοχή των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων και δίνουν οδηγίες για την επίτευξη της γνωστικής συμμετοχής των μαθητών στη μάθηση. Διδακτικές αποφάσεις και επιλογές των εκπαιδευτικών, όπως τι θα διδάξουν, πώς θα το διδάξουν, τι είδους δραστηριότητες θα αναθέσουν στους μαθητές τους και πώς θα αξιολογήσουν τα μαθησιακά τους επιτεύγματα, βασίζονται συχνά σε μεγάλο βαθμό στα διδακτικά εγχειρίδια (Reys et al., 2004; Pepin, 2008). Το σχολικό βιβλίο μαθηματικών εκθέτει τη θεωρία, συγκεφαλαιώνει τα βασικά συμπεράσματα και αποτελεί πηγή ασκήσεων και προβλημάτων για τις κατ' οίκον εργασίες των μαθητών, καθώς και βιβλίο αναφοράς και μέσο αυτοδιδασκαλίας (Howson, 1995).

Τα σχολικά βιβλία μαθηματικών, λόγω της βαρύνουσας μορφωτικής σημασίας τους ως εργαλεία για την υποστήριξη της μάθησης των μαθητών, αποτέλεσαν αντικείμενο έρευνας διεθνώς για αρκετά χρόνια (Haggarty & Pepin, 2002; Reys et al., 2004). Τις τελευταίες δεκαετίες το ενδιαφέρον αυτό αυξάνεται επειδή οι μελέτες και οι παρατηρήσεις από τη χρήση των εγχειριδίων στις σχολικές τάξεις έδειξαν ότι έχουν προεξάρχουσα θέση στην αίθουσα διδασκαλίας για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές (Hudson et al., 2010; Μπαράλος, 2009). Η διάταξη και οργάνωση του περιεχομένου των σχολικών βιβλίων μαθηματικών επηρεάζει την πραγματική διδασκαλία στην τάξη, τις μαθησιακές δραστηριότητες, την αλληλουχία των μαθημάτων, τις παιδαγωγικές μεθόδους και την ποιότητα των εκπαιδευτικών ευκαιριών των μαθητών (Χασάπης, 2008; Pepin, 2008).

Στη χώρα μας τα νέα σχολικά βιβλία μαθηματικών του Γυμνασίου για πρώτη φορά εισήχθησαν στις τάξεις κατά το διδακτικό έτος 2007-2008 και αντικατέστησαν τα προηγούμενα, τα οποία είχαν ήδη συμπληρώσει εικοσαετή παρουσία στην εκπαίδευση (1987-2007). Τα νέα βιβλία γράφτηκαν με βάση το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών (Ε.Π.Π.Σ.Μ.), (Υπουργείο Παιδείας, 1997) και το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών-Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ.), (Υπουργείο Παιδείας, 2003), το οποίο δίνει βαρύνουσα σημασία στη διαθεματικότητα και την προώθηση της ενεργητικής μάθησης (Καραγεώργος, 1998; Χιονίδου - Μοσκοφόγλου, 2002; Σκούρας, 2002β; Κολέζα, 2007α). Την ίδια περίπου περίοδο συζητήθηκε στη μαθηματική κοινότητα η έννοια της δραστηριότητας (Κολέζα, 1997; Σκούρας, 2002α; Φερεντίνος, 2001) και αναπτύχθηκε γενικός προβληματισμός για τη μεταρρύθμιση των Α.Π.Σ. (Βισκαδουράκης, 2004). Στο πλαίσιο του 24^{ου} συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (2007) προβλήθηκαν οι καινοτομίες των νέων σχολικών βιβλίων μαθηματικών του Γυμνασίου και επισημάνθηκαν ορισμένες αδυναμίες τους. Τα πυρά της κριτικής στράφηκαν προς ποικίλες κατευθύνσεις, όπως στην έλλειψη συνεργασίας των συγγραφικών ομάδων των τριών τάξεων του Γυμνασίου, στην υποτίμηση της γεωμετρικής απόδειξης, τον ανατιολόγητο χωρισμό άλγεβρας-γεωμετρίας, την εισαγωγή ασύνδετων και ακατάλληλων

δραστηριοτήτων που διασπούν την ολότητα της διδακτικής ενότητας, την κλειστότητα των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών, την έλλειψη ουσιαστικής επιμόρφωσης, την αδυναμία εφαρμογής μαθητοκεντρικών μεθόδων διδασκαλίας, την κάλυψη της διδασκόμενης ύλης στον ανεπαρκή αριθμό διδακτικών εβδομάδων (περίπου 85 διδακτικές ώρες το χρόνο, όταν για την ίδια ύλη στις περισσότερες χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης διατίθενται 140 ώρες), κ.λπ. (Βερούκιος, 2009; Μπαραλός, 2009; Καλαβάσης, 2007; Κολέζα, 2007β; Φερεντίνος, 2007).

Στην εποχή μας κυριαρχεί η κουλτούρα των αριθμών και των δεικτών σύγκρισης. Η βελτίωση της ποιότητας των σχολικών βιβλίων επηρεάζεται από τις διεθνείς συγκρίσεις και τις συνακόλουθες πιέσεις για αλλαγές στην εκπαιδευτική πολιτική των χωρών (TIMSS, 2013; PISA, 2013). Οι αρχές και τα πρότυπα αυτών των αξιολογήσεων για το μαθηματικό περιεχόμενο, την προσαρμογή του στις ανάγκες των μαθητών, την αξιοποίηση της διδακτικής γνώσης του αντικειμένου στον τρόπο παρουσίασής του και τα κριτήρια συναποτίμησης της γνωστικής, διδακτικής και παιδαγωγικής διάστασης προδιαγράφουν μεταρρυθμίσεις στα ΠΣΜ και στα σχολικά βιβλία (Valverde et al., 2002; Κολέζα, 2006). Τα υψηλής ποιότητας σχολικά εγχειρίδια υλοποιούν φιλόδοξα ΠΣΜ και αποτελούν πανίσχυρα εργαλεία που βοηθούν τους μαθητές στην κατανόηση των μαθηματικών, παρέχουν πλούσιες μαθησιακές ευκαιρίες σε αυτούς και καλλιεργούν την αγάπη για τη μελέτη, προσφέροντας την εκτίμηση της ομορφιάς και της δύναμης των μαθηματικών και μια αίσθηση περιέργειας και αισθητικής απόλαυσης (Tarr et al., 2006). Κατά βάση, τα σχολικά βιβλία διαμορφώνουν τις ιδιαίτερες διαδικασίες μετάδοσης και απόκτησης της γνώσης και μεταφέρουν ισχυρά μηνύματα στους γονείς και τους μαθητές για τη φύση των μαθηματικών και την αξία της μαθηματικής μάθησης. Οι δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων επηρεάζουν, σε μεγάλο βαθμό, την πραγματική διδασκαλία στην τάξη και τον τρόπο που οι μαθητές βιώνουν τα μαθηματικά (Johansson, 2006; Χασάπης, 2008).

Τα εγχειρίδια υψηλής ποιότητας διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην αλλαγή της μαθηματικής εκπαίδευσης, ενσωματώνουν δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας, ενθαρρύνουν τους μαθητές να λύνουν σημαντικά προβλήματα και καλλιεργούν θετικές στάσεις στους μαθητές για τα μαθηματικά (Stein & Kim, 2009; Hudson et al., 2010). Τα λυσιτελή σχολικά βιβλία καλής ποιότητας χρωματίζουν την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, διευκολύνουν την επαγγελματική ανάπτυξη των καθηγητών μαθηματικών και βοηθούν τους μαθητές να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους και να επιτύχουν σημαντικούς στόχους της μάθησης των μαθηματικών (Nicol & Crespo, 2006). Στο πλαίσιο μιας σύγχρονης διδασκαλίας ο εκπαιδευτικός είναι ένας ενεργός σχεδιαστής, ο οποίος συνεργάζεται με άλλους εκπαιδευτικούς, διαθέτει παιδαγωγική αυτονομία και αντί να αναμεταδίδει πιστά το μαθηματικό περιεχόμενο του βιβλίου, αξιοποιεί το βιβλίο ως ένα δυνατό εργαλείο (Stouraitis et al., 2015).

Η ποιοτική αναβάθμιση των σχολικών βιβλίων μαθηματικών συνδέεται με την αναγκαιότητα της αξιολόγησης και της κριτικής αποτίμησής τους για την κατανόηση του ρόλου τους και την ανανέωση και αναμόρφωσή τους (Pingel, 2000). Στα σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα η εκπαιδευτική αξιολόγηση θεωρείται αναπόσπαστο τμήμα για τη μεταμόρφωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας και έχει βαρύνουσα σημασία για την εκπαίδευση στο σύνολό της (Perin, 2008). Ειδικότερα, η αξιολόγηση των σχολικών βιβλίων είναι μια συστηματική διαδικασία παρατήρησης, επεξεργασίας και ερμηνείας στοιχείων και δεδομένων, τα οποία οδηγούν σε εκτίμηση της αξίας τους, στη δημιουργία συνθέσεων, την εξαγωγή συμπερασμάτων και τη λήψη αποφάσεων για την αλλαγή και βελτίωσή τους.

Συνυφαίνεται με την ευρύτερη εκπαιδευτική προσπάθεια και την ενίσχυση των μαθησιακών αποτελεσμάτων της διδασκαλίας των μαθηματικών για όλους τους μαθητές.

Στο πλαίσιο της αξιολόγησης των σχολικών βιβλίων μαθηματικών η εξέταση της υποστήριξης πρόσφορων δραστηριοτήτων υψηλής γνωστικής βαρύτητας έχει προεξάρχουσα σημασία. Σύμφωνα με τους Henningsen και Stein (1997) οι μαθηματικές δραστηριότητες κατατάσσονται σε δραστηριότητες χαμηλών και υψηλών γνωστικών απαιτήσεων. Οι μαθηματικές δραστηριότητες χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων ζητούν από τους μαθητές να τελειοποιούν διαδικασίες ρουτίνας, να αναπαράγουν ασύνδετες πληροφορίες ή να απομνημονεύουν κανόνες. Στις δραστηριότητες χαμηλής γνωστικής βαρύτητας προεξάρχει η μιμητική επανάληψη διαδικασιών και η πρόσληψη πληροφοριών χωρίς κατανόηση. Ο μαθητής που υιοθετεί τις παραπάνω μεθόδους αδυνατεί να κάνει διερευνήσεις, συνδυασμούς και να βρει νέες λύσεις σε προβλήματα. Συσσωρεύει ασύνδετες πληροφορίες χωρίς να σκέφτεται, απλώς αναπαράγει αυτά που σκέφτηκαν άλλοι. Οι απομνημονευμένες πληροφορίες δεν συνεισφέρουν σχεδόν ποτέ σε ένα στιβαρό και παραγωγικό δίκτυο ιδεών (Hiebert, 1986). Η μηχανική απομνημόνευση της διδασκόμενης ύλης είναι επιφανειακή και αδύναμη μέθοδος μάθησης. Επικεντρώνεται στη στείρα αποστήθιση, ενώ εμποδίζει τη βαθιά εννοιολογική ή συσχετιστική κατανόηση (Skemp, 1978).

Οι δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας απαιτούν από τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των βασικών μαθηματικών ιδεών. Το χτίσιμο της γνώσης προϋποθέτει συσχετισμούς και οργάνωση ανάμεσα στις έννοιες. Η εννοιολογική κατανόηση είναι πλούσια σε διασυνδέσεις, είναι «ένα δίκτυο εννοιών και σχέσεων» (Hiebert, 1986). Αποτελεί μια διαδικασία αναζήτησης νοήματος όπου οι γενικεύσεις (σχέσεις εννοιών) έχουν πρωτεύοντα ρόλο. Επιπλέον, οι δραστηριότητες υψηλών γνωστικών απαιτήσεων καλλιεργούν στους μαθητές τις θεμελιώδεις μαθηματικές διεργασίες συλλογισμού και επιχειρηματολογίας, διατύπωσης εικασιών και γενίκευσης, δημιουργίας συνδέσεων, γένεσης μαθηματικών ιδεών, ανάπτυξης επικοινωνίας και συνεργασίας κατά τη διερεύνηση και πραγμάτευση ανοιχτών δραστηριοτήτων (Kosynas, 2016; ΙΕΠ, 2014). Ως εκ τούτου, η μελετημένη ενσωμάτωση δραστηριοτήτων υψηλής γνωστικής βαρύτητας στα σχολικά εγχειρίδια είναι σημαντική για την υποστήριξη της μάθησης όλων των μαθητών.

Υπό το πρίσμα της προηγούμενης θεωρητικής θεμελίωσης, στο πλαίσιο αυτής της εργασίας θα στρέψουμε την προσοχή μας στην αξιολόγηση του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου και θα περιγράψουμε τα αποτελέσματα της σχετικής αποτίμησης. Βασικά ερευνητικά ερωτήματα αυτής της εργασίας είναι: *Ποια είναι τα αποτελέσματα της κριτικής αποτίμησης του αξιολογούμενου σχολικού βιβλίου μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου ως προς τη δομή και το περιεχόμενο; Το βιβλίο περιέχει θεμελιώδεις μαθηματικές διεργασίες υψηλής γνωστικής βαρύτητας;*

Μεθοδολογία της κριτικής αποτίμησης

Η κριτική αποτίμηση των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών αποτελεί ένα ευαίσθητο και επίμαχο θέμα το οποίο συνδέεται με αξιολογικές παραδοχές, κριτήρια και μεθόδους και η προσέγγισή του αποτελεί ένα ανοικτό επιστημονικό θέμα (Pingel, 2000). Οι περισσότεροι ερευνητές καταλήγουν σε τέσσερις κυρίως διαστάσεις αξιολόγησης των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών (TIMSS, 2013; PISA, 2013; KEE, 2007; Κολέζα, 2006; Κολέζα, 2007γ;

NCTM, 2000). Το μεθοδολογικό πλαίσιο και τα κριτήρια αξιολόγησης που ακολουθούν αποτελούν ένα συγκερασμό των ακόλουθων διαστάσεων: εγκυρότητα του μαθηματικού περιεχομένου, δομή και παρουσίαση σε κεφάλαια και ενότητες, γνωστική, παιδαγωγική και διδακτική διάσταση του περιεχομένου.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι οι συγγραφείς του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος κ. ά., 2008) ακολούθησαν, όπως άλλωστε όφειλαν, τις επιταγές των Προγραμμάτων Σπουδών εκείνης της περιόδου (Ε.Π.Π.Σ.Μ., 1997 και Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ., 2003). Στην εργασία μας αυτή δεν εξετάζουμε τη συμβατότητα του αξιολογούμενου βιβλίου προς τα αντίστοιχα Προγράμματα Σπουδών. Θα περιοριστούμε σε ένα μέρος της αξιολόγησης, εφόσον η πλήρης μελέτη σε όλη την πολυπλοκότητα και πυκνότητά της είναι δύσκολη και ίσως ανέφικτη. Η κριτική αποτίμηση αξιοποιεί ως βάση τις προαναφερόμενες διαστάσεις και τις σύγχρονες ιδέες της διδακτικής των μαθηματικών υπερβαίνοντας το καθιερωμένο εκπαιδευτικό πλαίσιο. Κατά βάση μελετούμε αν το βιβλίο περιέχει θεμελιώδεις μαθηματικές διεργασίες υψηλής γνωστικής βαρύτητας που κινητοποιούν τους μαθητές στη μάθηση.

Αποτελέσματα της αποτίμησης του σχολικού βιβλίου μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου και δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας

Το σχολικό βιβλίο μαθηματικών αποτελεί έναν από τους καθοριστικούς παράγοντες αποτελεσματικότητας των ΠΣ της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Το σχολικό εγχειρίδιο χρησιμεύει ως οδηγός της διδασκαλίας των μαθηματικών και ως πηγή ιδεών για τους δυνατούς τρόπους διδασκαλίας του περιεχομένου και εμπλοκής των μαθητών στη διερεύνηση, για τις μορφές οργάνωσης της διδασκαλίας και την αξιολόγηση της μάθησης των μαθητών (Tarr et al., 2006; Hudson et al., 2010). Η κριτική αποτίμηση του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου περιλαμβάνει ορισμένες μόνο πτυχές της μεθοδολογίας, διότι αφενός είναι αυτές που θεωρούμε σημαντικότερες και αφετέρου διότι η έκταση της παρούσας εργασίας δεν μας επιτρέπει να επεκταθούμε σε όλες.

Το σχολικό βιβλίο μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου γράφτηκε κατά την περίοδο 2003-2004 με βάση το προγενέστερο Ε.Π.Π.Σ.Μ. (Υπουργείο Παιδείας, 1997), με αποτέλεσμα να παρουσιάζονται προβλήματα προσαρμογής προς το Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ. (Υπουργείο Παιδείας, 2003), το οποίο διαπνέεται από την αρχή της διαθεματικότητας. Το μαθηματικό περιεχόμενο του βιβλίου χωρίζεται στις εξής Βασικές Θεματικές Περιοχές (ΒΘΠ):

- Άλγεβρα – Στατιστική
- Γεωμετρία – Μέτρηση – Τριγωνομετρία

Η παραπάνω δομή αποκλίνει από το μεταγενέστερο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών του 2011 (Υπουργείο Παιδείας, 2011; ΙΕΠ, 2014), το οποίο έχει σύγχρονη φιλοσοφία, αποδίδει βαρύνουσα σημασία στα Στοχαστικά Μαθηματικά και μοιάζει με την αντίστοιχη δομή που προτείνεται από το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). Το Α΄ μέρος του βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου περιλαμβάνει τη ΒΘΠ Άλγεβρα-Στατιστική και το Β΄ μέρος τη ΒΘΠ Γεωμετρία – Μέτρηση – Τριγωνομετρία. Συγκεκριμένα:

Βασική Θεματική Περιοχή	Αριθμός κεφαλαίου	Τίτλος - Περιεχόμενο
Άλγεβρα – Στατιστική	1	Εξισώσεις – Ανισώσεις
	2	Πραγματικοί Αριθμοί
	3	Συναρτήσεις
	4	Περιγραφική Στατιστική
Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση – Τριγωνομετρία	1	Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων – Πυθαγόρειο Θεώρημα
	2	Τριγωνομετρία – Διανύσματα
	3	Μέτρηση Κύκλου
	4	Γεωμετρικά Σχήματα – Μέτρηση Στερεών

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η διδασκαλία των σχολικών βιβλίων μαθηματικών του Γυμνασίου υποστηρίζεται από αντίστοιχα βιβλία εκπαιδευτικού. Το βιβλίο εκπαιδευτικού της Β΄ Γυμνασίου, το οποίο είναι έργο των ιδίων συγγραφέων, περιλαμβάνει ενδεικτικά κριτήρια αξιολόγησης, επαναληπτικές ασκήσεις ανά κεφάλαιο, φύλλα εργασίας και άλλο επιπρόσθετο υλικό. Επιπλέον, σκιαγραφεί ορισμένες ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες για τα ανάλογα ποσά στις θετικές και ανθρωπιστικές επιστήμες (σελ. 44-45). Στο βιβλίο μνημονεύεται δύο φορές η εργασία των μαθητών σε ομάδες χωρίς περαιτέρω λεπτομέρειες. Το βιβλίο δεν κάνει καμιά αναφορά στις δυσκολίες, παρανοήσεις και τις πιθανές αντιδράσεις των μαθητών, τη διαχείριση των διδακτικών δραστηριοτήτων και τον βαθμό καθοδήγησης από τον εκπαιδευτικό, τους τρόπους ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών κατά τη διδασκαλία, κ.λπ.

Σε αντίθεση προς τα βιβλία εκπαιδευτικού των άλλων δύο τάξεων του Γυμνασίου το βιβλίο εκπαιδευτικού της Β΄ τάξης δεν θεμελιώνεται σε θεωρητικό πλαίσιο. Έχουν αποσιωπηθεί, οι γενικές τοποθετήσεις των ΑΠΣ για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών μέσω της επίλυσης προβλήματος, η θεωρία κατασκευής της γνώσης (κονστрукτιβισμός), η ενεργητική μάθηση και η σημασία των δραστηριοτήτων. Σύμφωνα με την εκτίμησή μας στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου υποθάλλει τη φιλοσοφική αρχή σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη βέβαιη, απόλυτη και μη αναθεωρήσιμη, είναι ένα προκατασκευασμένο σύστημα κανόνων, σχέσεων και εννοιών.

Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι στο βιβλίο υπεισέρχεται μια εργαλειική και φορμαλιστική αντίληψη. Στην εργαλειική αντίληψη προεξάρχουν αλγόριθμοι εκτέλεσης πράξεων και τεχνικές διαδικασίες για γενική εφαρμοσιμότητα. Επιπλέον, στο πλαίσιο του φορμαλισμού, το βιβλίο διεκπεραιώνει τη μεταφορά των επιστημονικών γνώσεων χωρίς κατάλληλη διδακτική επανοργάνωση, ωθώντας τους μαθητές να βιώνουν τα μαθηματικά ως μια συμβολική δραστηριότητα χωρίς νόημα. Οι μαθητές καλούνται να ανακαλούν και να εφαρμόζουν κανόνες και τύπους. Σε αρμονία προς αυτά, το μαθηματικό περιεχόμενο εκτίθεται με ακρίβεια, σαφήνεια και επιστημονική εγκυρότητα. Για το διδακτικό πακέτο της Β΄ Γυμνασίου έχουν επισημανθεί ελάχιστα λάθη ή ανακρίβειες, τα οποία διορθώθηκαν εν μέρει κατά την επανέκδοσή του (Ρίζος, 2007; Πρίντζης, 2007; Βόσκογλου & Κόσσυβας, 2012). Παρότι στη δομή του εκπαιδευτικού υλικού διαπιστώνεται λογική συνοχή, οι μαθητές δεν διακρίνουν εύκολα ορισμούς, αναπόδεικτες παραδοχές (συμβάσεις, έτοιμα συμπεράσματα) και προτάσεις που συνοδεύονται από απόδειξη.

Η συνήθης δομή των ενοτήτων είναι σε γενικές γραμμές η εξής: λυμένη εισαγωγική δραστηριότητα, παρουσίαση θεωρητικών γνώσεων και τεχνικών, λυμένες ασκήσεις ή/και εφαρμογές, ερωτήσεις κατανόησης ή/και άλυτες ασκήσεις και προβλήματα. Επιδιώκεται ο συνδυασμός επαγωγικής (εισαγωγική δραστηριότητα-παράδειγμα, εικασία και διατύπωση μαθηματικού νόμου) και παραγωγικής διεργασίας (απόδειξη και ανάπτυξη μεθοδολογίας για την απόδειξη του νόμου και την εφαρμογή του σε άλυτες ασκήσεις και προβλήματα). Η ενσωμάτωση εισαγωγικών δραστηριοτήτων στα ελληνικά σχολικά βιβλία μαθηματικών αποτελεί σημαντική καινοτομία για εκείνη τη χρονική περίοδο. Μέχρι τότε τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών οργάνωναν το περιεχόμενο σε τρία μέρη: παρουσίαση θεωρητικών γνώσεων και μεθόδων (ορισμός, θεώρημα, αλγοριθμική διαδικασία, τεχνική, κανόνας, τύπος, κ.λπ.), παραδείγματα-εφαρμογές που αποτελούσαν είδος προτύπων και τέλος ασκήσεις και προβλήματα (Χασάπης, 2008).

Στα νέα βιβλία του Γυμνασίου ήταν εμφανής η προσπάθεια των συγγραφέων να προτείνουν «δραστηριότητες» που παραπέμπουν σε προβλήματα ή καταστάσεις της καθημερινότητας, όμως οι περισσότερες είναι αποσπασματικές και τεχνητές «ψευδοδραστηριότητες», δεν αξιοποιούν αυθεντικά πλαίσια του πραγματικού κόσμου ή τις εκθέτουν λυμένες ακυρώνοντας την εμπλοκή των μαθητών και επιφέροντας ασυνέχεια θεωρίας και πράξης (Ρίζος, 2007; Λυμπεροπούλου & Παπαδάκη, 2008). Οι μαθηματικές έννοιες δεν μπορούν να ολοκληρωθούν με μια-δύο μεμονωμένες δραστηριότητες. Η λυμένη εισαγωγική δραστηριότητα έχει καθαρά προσχηματικό χαρακτήρα καθώς αποστειρεί τους μαθητές από τη δική τους μαθηματική δράση και σκέψη για τη συστηματική αναζήτηση στρατηγικών, τη δημιουργία αναπαραστάσεων και εξηγήσεων. Τα ιστορικά σημειώματα έχουν απλώς διακοσμητικό χαρακτήρα. Κατά βάση το βιβλίο κατευθύνει τους μαθητές να αποκτήσουν πρώτα μαθηματικές έννοιες και τεχνικές και στη συνέχεια να τις εφαρμόσουν την επίλυση ασκήσεων ή προβλημάτων ρουτίνας. Προηγούνται οι υποδειγματικές λύσεις των εφαρμογών και στη συνέχεια ζητείται η λύση παρόμοιων ασκήσεων. Καθώς οι μαθητές ωθούνται να ακολουθούν οδηγίες δεν αναπτύσσουν δημιουργικές πρωτοβουλίες, δεν αποκτούν ικανότητες διερεύνησης και επίλυσης προβλημάτων και παραγωγής ουσιαστικών γνώσεων.

Σε γενικές γραμμές η εισαγωγή των δραστηριοτήτων στα νέα βιβλία των μαθηματικών από το σχολικό έτος 2007-2008 αντιμετωπίστηκε με επιφυλάξεις, προκαλώντας στους εκπαιδευτικούς ανησυχίες για τον σχεδιασμό και τη διαχείριση της διδασκαλίας με βάση αυτές. Σύμφωνα με τα ερευνητικά δεδομένα οι λυμένες εφαρμογές είχαν τη θετική αποδοχή των καθηγητών. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί ζητούσαν περισσότερες ασκήσεις από τα νέα βιβλία, όχι όμως περισσότερα προβλήματα ή περισσότερες διαθεματικές εργασίες με προβλήματα της καθημερινής ζωής (Γκίνης & Πιτέρη, 2008). Η διαθεματικότητα δεν κέντρισε το ενδιαφέρον της πλειονότητας. Σύμφωνα με σχετική έρευνα οι δραστηριότητες των σχολικών βιβλίων αγνοούνταν ή λύνονταν στον πίνακα από τους διδάσκοντες, ενώ μόνο το ¼ των εκπαιδευτικών τις ανέθετε στους μαθητές για ατομική ή ομαδική επίλυση (Δημητριάδου κ. ά., 2009). Η πλειονότητα των εκπαιδευτικών προτιμούσε τυπικές ασκήσεις για εμπέδωση και εξεταστική κατανάλωση παρά ρηζικέλευθες δραστηριότητες. Πολλοί εκπαιδευτικοί έδειξαν να συναποδέχονται ότι με την παραδοσιακή, ομοιόμορφη και σχεδόν αποκλειστική χρήση των σχολικών βιβλίων είναι πιθανό να απομακρύνεται η αβεβαιότητα και η ανασφάλεια και να περιορίζονται οι δυσκολίες μάθησης των μαθητών.

Με τις εισαγωγικές δραστηριότητες επιδιώκεται να δημιουργηθεί ένας προβληματισμός που βασίζεται στην ανάπτυξη πολλαπλών ερωτημάτων τα οποία αποβλέπουν στην

ενεργοποίηση της σκέψης των μαθητών και την ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων τους. Ειδικότερα αποσκοπούν στην αξιοποίηση των πρότερων γνώσεων για την οικοδόμηση της νέας γνώσης, την ανάπτυξη της μαθηματικής συζήτησης στην τάξη και τον αναστοχασμό των μαθητών πάνω στις ενέργειές τους (Τσικοπούλου, 2008). Στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου η διδασκαλία σε γενικές γραμμές έχει σχεδιαστεί με αφετηρία τον εκπαιδευτικό και όχι τα παιδιά. Η εισαγωγική δραστηριότητα δεν λαμβάνει υπόψη τη γνωστική κατάσταση των διαφορετικών μαθητών ούτε εστιάζει συνήθως στα σημαντικά μαθηματικά που αυτοί πρέπει να μάθουν. Η λυμένη δραστηριότητα δεν αποτελεί πραγματική αφόρμηση που αφυπνίζει την περιέργεια και ενεργοποιεί τη σκέψη των μαθητών προσφέροντας μια πρόγευση του μαθήματος. Αντί να θέτει ενδεικτικά ερωτήματα, τα οποία θα μπορούσαν αποτελέσουν αντικείμενο γλωσσικής αλληλεπίδρασης, μαθηματικής επικοινωνίας και διαπραγμάτευσης νοημάτων στην τάξη, αχρηστεύει κάθε έννοια προβλήματος. Οι ορισμοί, οι διαδικασίες και τα ετοιμοπαράδοτα συμπεράσματα εισάγονται χωρίς να έχουν διερευνηθεί από τους μαθητές. Στην πραγματικότητα η λυμένη δραστηριότητα ακυρώνεται αφού αδυνατεί να προκαλέσει τον προβληματισμό που οδηγεί στην ανάγκη ομαλής ανάπτυξης της θεωρίας. Η θεωρία, οι δραστηριότητες και οι ασκήσεις δεν απαιτούν τη νοητική εμπλοκή του μαθητή. Ο μαθητής καταθέτει τα όπλα προτού τα πιάσει και καλείται απλώς να αφομοιώσει τις εκάστοτε μεθόδους λύσης, να υιοθετήσει το ήδη γεννημένο, να συνυπογράψει το χιλιοδοκιμασμένο και τέλειο.

Επεκτείνοντας τον προβληματισμό υπό το πρίσμα των σύγχρονων διδακτικών προσεγγίσεων διαπιστώνουμε ότι οι δραστηριότητες του βιβλίου δεν έχουν πάντα πλούσιο παιδαγωγικό περιεχόμενο ούτε συνδέουν ποικιλία γόνιμων ιδεών και αναπαραστάσεων. Επίσης δεν λύνονται με πολλούς εναλλακτικούς τρόπους και υπάρχει σημαντική υστέρηση στη διερεύνηση, τον πειραματισμό και τη διατύπωση εικασιών. Τέλος, οι λυμένες εφαρμογές και οι άλυτες ασκήσεις δεν κλιμακώνονται με βάση τον βαθμό δυσκολίας ούτε ταξινομούνται σε κατηγορίες. Το εν λόγω σχολικό βιβλίο ζητά από τους μαθητές να καταναλώσουν το μεγαλύτερο μέρος της προσπάθειας και του χρόνου τους σε μαθηματικές διαδικασίες που είναι παρόμοιες με αντίστοιχες λυμένες δραστηριότητες του βιβλίου. Παρόλο που η πρακτική αυτή συνήθως οδηγεί στην εύρεση της σωστής απάντησης στις προτεινόμενες από το βιβλίο ασκήσεις, αναπτύσσει ορισμένες μόνο πτυχές της γνωστικής και διδακτικής διάστασης και δεν συμβάλλει ιδιαίτερα στη δημιουργία συνδέσεων και την εννοιολογική κατανόηση και πολύ περισσότερο στην ανάπτυξη επαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού καθώς και της κριτικής σκέψης των μαθητών.

Σε όλη την έκταση του βιβλίου προεξάρχει η απομνημόνευση και η εφαρμογή χρηστικών κανόνων που εφαρμόζονται για να αποκτήσουν οι μαθητές χειρισμό των συμβόλων και άνεση στη χρήση δεξιοτήτων μέσω επαναληπτικών ασκήσεων. Η φορμαλιστική προσέγγιση δεν περιορίζεται μόνο στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, αλλά εκτείνεται στην προσέγγιση των άρρητων αριθμών. Προτού δοθεί η ετοιμοπαράδοτη παρακαταθήκη των Πυθαγορείων θα μπορούσαν οι μαθητές μέσω κατάλληλης διερεύνησης να συμπεράνουν ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν είναι ρητοί. Το έλλειμμα εντοπίζεται σε αρκετούς τομείς, όμως η έκταση της παρούσας εργασίας δεν επιτρέπει την εκτενή ανάλυση, γι' αυτό θα επιλέξουμε ενδεικτικά ορισμένους αλγεβρικούς, στατιστικούς και γεωμετρικούς τομείς που παραπέμπουν στην επίλυση προβλημάτων και την αξιοποίηση γραφικών παραστάσεων.

Εναλλακτικά προς τη συνήθη πρακτική των σχολικών βιβλίων στα σύγχρονα εγχειρίδια προτείνονται μαθηματικές δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος. Ως επίλυση προβλήματος μπορούμε να χαρακτηρίσουμε μία διεργασία στην οποία η μέθοδος επίλυσης

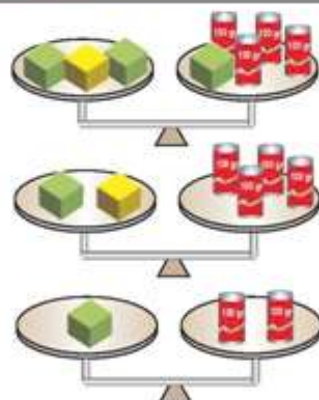
δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων (NCTM, 2000). Ο Schoenfeld (1985) υποστηρίζει ότι όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε ένα μαθηματικό πρόβλημα που δεν είναι οικείο αναπτύσσουν αφενός τις μαθηματικές τους γνώσεις και αφετέρου την ικανότητά τους να δημιουργούν μεθόδους και στρατηγικές επίλυσης οι οποίες δεν προέρχονται από μιμητική, αλλά αντίθετα από δημιουργική συλλογιστική (Lithner, 2008). Επιπλέον, τα προβλήματα παρουσιάζουν περισσότερο ενδιαφέρον όταν αφορούν ρεαλιστικές καταστάσεις της καθημερινότητας ή πραγματικά γεγονότα που έχουν νόημα για τους μαθητές (Καλαβάσης, 1997). Η επίλυση προβλήματος αναπτύσσει υψηλές γνωστικές ικανότητες, ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών και προωθεί δεξιότητες σκέψης και επικοινωνίας. Για όλους τους παραπάνω λόγους η διδασκαλία τους αποτελεί σημαντικό μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Schoenfeld, 1985). Επομένως, θα έπρεπε να αξιοποιούνται σε όλη την έκταση των σχολικών βιβλίων.

Το σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου περιέχει δύο παραγράφους με εφαρμογές στις ενότητες 1.4 «Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων» και 2.3 «Προβλήματα» του Α΄ μέρους. Υπάρχει επίσης ένα τουλάχιστον τέτοιο πρόβλημα σχεδόν σε κάθε ενότητα. Στην ενότητα 1.4 έχουμε 1 εισαγωγική δραστηριότητα, 4 λυμένες εφαρμογές και 10 άλυτες ασκήσεις, ενώ στην ενότητα 2.3 έχουμε 4 λυμένα προβλήματα και 9 άλυτες ασκήσεις. Από αυτά ένα παραπέμπει σε πραγματικό γεγονός, 14 δυνητικά μπορούν να έχουν κάποια εφαρμογή στην καθημερινότητα και τα υπόλοιπα είναι τεχνητές κατασκευές για την εμπέδωση της θεωρίας, τα οποία απλώς μιμούνται καταστάσεις του πραγματικού κόσμου. Σε όλη την έκταση του βιβλίου συγκαταλέγονται αρκετά ψευδοπροβλήματα με εξωπραγματικά δεδομένα όπως η Δραστηριότητα 2 (σελ. 74) στην οποία δεν αναφέρονται οι τιμές που λαμβάνουν οι μεταβλητές, η Δραστηριότητα 1 (σελ. 79) στην οποία η ταχύτητα του ποδηλάτου δεν είναι ρεαλιστική, η Δραστηριότητα 1 (σελ. 175) στην οποία το φοιτητικό αμφιθέατρο λογίζεται ως ημικυκλικό, η Άσκηση 8 (σελ. 57) στην οποία το αυτοκίνητο κινείται 24 ώρες επί 5 συνεχείς ημέρες και στην Άσκηση 11 (σελ. 155) στην οποία τα σπουργίτια βλέπουν μια ρώγα από σταφύλι υπό δεδομένες γωνίες. Από τα προβλήματα πραγματικών καταστάσεων η Εισαγωγική Δραστηριότητα 1 (σελ. 26), η Άσκηση 10 (σελ. 30) και η Άσκηση 9 (σελ. 52) είναι σημαντικής βαρύτητας διότι παρουσιάζουν είτε ένα πραγματικό γεγονός όπως στην πρώτη περίπτωση είτε ρεαλιστικές καταστάσεις στις οποίες εφαρμόζονται τα μαθηματικά. Τα προβλήματα αυτά είναι ικανά να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών αλλά είναι συνήθως λυμένα όπως η Δραστηριότητα 1 της ενότητας 1.4 ή είναι ασφυκτικά κατευθυνόμενα στην επίλυσή τους όπως η Άσκηση 9 της ενότητας 2.3 που δίνεται σχεδιάγραμμα στο οποίο θα μπορούσαν να καταλήξουν οι μαθητές και επιπλέον υπάρχει αντίστοιχο λυμένο πρόβλημα (Πρόβλημα 2, σελ. 49). Έτσι περιορίζονται τα γνωρίσματα που χαρακτηρίζουν τις μαθηματικές δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας όπως η διερεύνηση, η μαθηματική μοντελοποίηση, η πρωτοτυπία, η επιχειρηματολογία, η ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης σε μη οικείες καταστάσεις. Υπάρχουν επίσης διάφορες εφαρμογές των μαθηματικών, διάσπαρτες στο βιβλίο που παρουσιάζουν διδακτικό ενδιαφέρον όπως για παράδειγμα η Άσκηση 8 της ενότητας 2.3 του Β΄ μέρους που αναφέρεται στην απόσταση Γης-Σελήνης.

Μία σημαντική συνεισφορά του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου αφορά στην επίλυση των εξισώσεων α΄ βαθμού στην ενότητα 1.2 του Α΄ μέρους. Το μοντέλο της ζυγαριάς οπτικοποιεί την εξίσωση ερμηνεύοντας το σύμβολο της ισότητας με την ισορροπία. Στη Δραστηριότητα 3 (σελ. 16-18) η σύνδεση των εννοιών, των διαφορετικών αναπαραστάσεων και η μετάβαση από τη ζυγαριά στον αλγεβρικό φορμαλισμό συμβάλει σημαντικά στη

βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης και την εξήγηση των αλγεβρικών ιδιοτήτων κατά την εκτέλεση μετασχηματισμών.

Εξίσωση $3x + 200 = x + 600$	Περιγραφή λύσης
$3x + 200 - 200 = x + 600 - 200$	Αφαιρούμε το 200 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης
$3x = x + 400$	Κάνουμε τις πράξεις
$3x - x = x + 400 - x$	Αφαιρούμε το x και από τα δύο μέλη της εξίσωσης
$(3 - 1)x = 400$ άρα $2x = 400$	Αναγωγή ομοίων όρων
$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$	Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης
$x = 200$	Απλοποιούμε τα κλάσματα



Σχήμα 1. Ο πίνακας αποτελεί τμήμα της Δραστηριότητας 3 του σχολικού βιβλίου που αναφέρεται στην επίλυση εξισώσεων (σελ. 17, ενότητα 1.2, Α΄ μέρος)

Το βιβλίο εκπαιδευτικού δεν κάνει καμιά αναφορά στο μοντέλο της ζυγαριάς, ενώ παρέχει σαφείς οδηγίες για την κατάκτηση της τυπικής μεθόδου επίλυσης εξισώσεων. Επιπλέον, στην ενότητα 1.2 «Εξισώσεις α΄ βαθμού» όλες οι άλυτες ασκήσεις ακολουθούν το φορμαλιστικό πνεύμα. Θα μπορούσε ορισμένες από αυτές να προσεγγιστούν σύμφωνα με την προηγούμενη μεθοδολογία.

Η επίλυση προβλημάτων δεν πρέπει να έχει σκοπό την εξάσκηση των μαθητών σε τύπους και χρηστικούς κανόνες. Στην ιστορία των μαθηματικών τα προβλήματα είναι η πηγή για τη δημιουργία νέων θεωριών. Πώς μπορεί να γεννηθεί στους μαθητές η ανάγκη για επαγωγική γενίκευση; Για την αποδυνάμωση της φορμαλιστικής προσέγγισης οι κανονικότητες της μορφής $f(v)=av$ ή $f(v)=av+b$ είναι ένα θαυμάσιο μέσον για την εισαγωγή στις αντίστοιχες συναρτήσεις. Η εύρεση του αλγεβρικού κανόνα περιλαμβάνεται στην ύλη της Α΄ Γυμνασίου με βάση το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών του 2011 (ΙΕΠ, 2014).

Στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου η έννοια της συνάρτησης παρουσιάζεται με μια αντίληψη εργαλειακή και φορμαλιστική. Η εν λόγω έννοια γεννήθηκε στην προσπάθεια μοντελοποίησης φυσικών φαινομένων που περιέχουν μεταβλητές ποσότητες. Στο βιβλίο η συνάρτηση ορίζεται ως «σχέση (με την οποία) σε κάθε τιμή της μεταβλητής x , αντιστοιχίζεται σε μια μόνο τιμή της μεταβλητής y » (σ. 55). Ο εν λόγω ορισμός παραγνωρίζει τη σχέση εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών και τη συνακόλουθη ιστορική εξέλιξη της έννοιας και πλησιάζει τον ορισμό του Dirichlet (αναφέρεται στη σχέση αντιστοίχισης δύο μεταβλητών ποσοτήτων). Για μια πρώτη εισαγωγή των μαθητών στην έννοια, ο ορισμός της συνάρτησης που υιοθετείται είναι αυστηρός και αφηρημένος (Φακούδης, 2008). Επίσης στο βιβλίο δεν δίνεται ούτε ένα παράδειγμα σχέσης που δεν είναι συνάρτηση και απουσιάζει η παρουσίαση συναρτήσεων με γεωμετρική εποπτεία, δηλαδή μέσω της γραφικής τους παράστασης.

Οι γραφικές παραστάσεις είναι ένας πολύ σημαντικός τομέας της διδασκαλίας των μαθηματικών που αναπτύσσει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών και την αξιοποίησή τους για την επίλυση προβλημάτων υψηλής γνωστικής βαρύτητας

(Leinhardt et al., 1990). Η ικανότητα των μαθητών να παριστάνουν γραφικά μια σχέση, με πίνακα τιμών, με τύπο συνάρτησης και με λέξεις και να μεταβαίνουν με ευχέρεια από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο προωθεί την ανάπτυξη διαφορετικών ειδών κατανόησης για τη μελετώμενη κατάσταση. Το σχολικό βιβλίο πραγματεύεται τις γραφικές παραστάσεις σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κυρίως στις θεματικές ενότητες που αναφέρονται στη γραφική παράσταση συνάρτησης (Α΄ μέρος, εν. 3.2-3.5). Στην περίπτωση αυτή παρέχονται σχεδόν αποκλειστικά μαθηματικές δραστηριότητες, εφαρμογές, άλυτες ασκήσεις που στην εκφώνησή τους δίνεται ο τύπος της συνάρτησης και ζητούνται ο πίνακας τιμών και η σχεδίαση της γραφικής παράστασης. Ελάχιστες δραστηριότητες σχετίζονται με την επίλυση προβλημάτων και πολύ λιγότερες με τη χρήση της γραφικής παράστασης για την επίλυσή τους. Εξαιρέσεις βεβαίως υπάρχουν, όπως η εφαρμογή 4 (εν. 3.2, σελ. 63-64) στην οποία δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης και ζητείται η άντληση πληροφοριών από τη γραφική παράσταση για την εύρεση της τιμής της εξαρτημένης (σκέλος β) και της ανεξάρτητης μεταβλητής (σκέλος γ). Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται στις παρόμοιες άλυτες ασκήσεις 8, 9 (σελ. 66) της εν λόγω ενότητας. Δεν υπάρχει καμιά εκφώνηση που ζητά τη λεκτική περιγραφή της συνάρτησης για δεδομένο αλγεβρικό τύπο ή πίνακα τιμών ούτε πρόβλημα με αφετηρία τη γραφική παράσταση.

Μια συνήθης εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της συνάρτησης $y=ax+\beta$ παρουσιάζεται στο βιβλίο στην εισαγωγική δραστηριότητα «το κινητό της Κατερίνας». Στο βιβλίο όλα είναι ετοιμοπαράδοτα. Με αυτή την παρουσίαση οι μαθητές δεν ενθαρρύνονται να σκεφτούν και να λύσουν το πρόβλημα, να αξιοποιήσουν συνδεόμενες μαθηματικές αναπαραστάσεις και να εμπλακούν στη μαθηματική συζήτηση της τάξης. Στο βιβλίο κατά τη μελέτη των συναρτήσεων $y=ax$ και $y=ax+\beta$ απουσιάζει η διερεύνηση της κλίσης και ειδικότερα η εξέταση του ρόλου του σταθερού ρυθμού μεταβολής α (σταθερή μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x). Επίσης για τη συνάρτηση $y=ax+\beta$, λείπει η διερεύνηση του β («σημείο» τομής με τον άξονα των y) και η αξιοποίηση των γραφικών παραστάσεων για την επίλυση εξισώσεων της μορφής $ax+\beta=y$. Όλα αυτά μπορούν να υποστηρίξονται έξοχα με την αξιοποίηση των «μικροπειραμάτων» ψηφιακής τεχνολογίας. Για τη χρήση ΤΠΕ στη μελέτη συναρτήσεων το βιβλίο εκπαιδευτικού αφιερώνει μια παράγραφο και κάνει απλώς μια παραπομπή (σελ. 33) στον δικτυακό τόπο [e-yliko \(http://www.e-yliko.gr\)](http://www.e-yliko.gr). Τέλος, η γενική εξίσωση ευθείας της μορφής $ax + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ και ο τύπος της απόστασης, θα πρέπει να περιλαμβάνονται στο ΠΣ της Γ΄ Γυμνασίου.

Το κεφάλαιο της Περιγραφικής Στατιστικής του Βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου είναι υποταγμένο στην Άλγεβρα (Α΄ μέρος, εν. 4.2). Στην ενότητα 4.2 του Α΄ μέρους η άντληση πληροφοριών και δεδομένων από γραφικές παραστάσεις υλοποιείται στην εισαγωγική δραστηριότητα 1 (σελ. 87), στις ερωτήσεις κατανόησης 1 & 2 (σελ. 93) και στις άλυτες ασκήσεις 1 & 2 (σελ. 94) από τις οποίες όμως απουσιάζουν πλήρως η ανάπτυξη επιχειρηματολογίας και η εξαγωγή συμπερασμάτων. Αντίθετα κυριαρχούν αλγοριθμικές διαδικασίες που στοχεύουν στη δημιουργία γραφικών αναπαραστάσεων προβλημάτων στατιστικής και όχι στην αξιοποίησή τους για την ανάπτυξη συλλογισμού και της κριτικής σκέψης των μαθητών. Απουσιάζει η κριτική ανάγνωση διαγραμμάτων και η εξέταση και ερμηνεία στατιστικών ερευνών. Δεν υπάρχουν κατάλληλες διερευνητικές δραστηριότητες για την ανάπτυξη μεθόδων προσδιορισμού της μέσης τιμής πέρα από τον τυπικό ορισμό και τις υπολογιστικές ασκήσεις. Όμως η μέση τιμή δεν είναι απλώς ένας αλγόριθμος. Για την ανάπτυξη της εννοιολογικής σκέψης των μαθητών μπορεί να ερμηνευθεί ως «δίκαιη μοιρασιά» (εξίσωση των τιμών) ή ως «σημείο ισορροπίας» των δεδομένων (Νέο Σχολείο, 2011).

Η διερεύνηση της έννοιας του εμβαδού απουσιάζει από το βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου (Κόσουβας, 2014β). Η απόδειξη του εμβαδού των επιπέδων σχημάτων μπορεί να γίνει με την εφαρμογή τεχνικών τεμαχισμού, ανασύνθεσης και μετασχηματισμών. Η παρουσίαση των πολλαπλών λύσεων στην τάξη προσφέρει ευκαιρίες για κοινωνικές αλληλεπιδράσεις. Η συζήτηση και σύγκριση των διαφορετικών μεθόδων λύσης στην τάξη βοηθά στη σύνδεση νέων και πρότερων γνώσεων, τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών και την επέκταση της γνώσης. Στο βιβλίο μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου η λυμένη εισαγωγική δραστηριότητα για το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Π. Θ.) συνδυάζει οπτική αιτιολόγηση και αλγεβρική απόδειξη. Στο δεύτερο σχήμα δεν εξηγείται γιατί το τετράπλευρο που βρίσκεται στο εσωτερικό του τετραγώνου είναι τετράγωνο. Εναλλακτικά, με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας η αλγεβρική απόδειξη μπορεί να προκύψει μόνο από το δεύτερο σχήμα. Πάντως η λυμένη δραστηριότητα δεν αφήνει στους μαθητές περιθώρια για διερεύνηση. Επιπλέον, στην πλειονότητα των εφαρμογών και ασκήσεων (ενότ. 1.4. του Β΄ μέρους, σσ. 128-131) υπερτερεί η ανάπτυξη αλγεβρικών και υπολογιστικών διαδικασιών, ενώ διεργασίες που ευνοούν τη γεωμετρική κατανόηση έχουν δευτερεύουσα σημασία ή αγνοούνται. Παρά τη σχετική προτροπή του βιβλίου εκπαιδευτικού να επιμένει ο διδάσκων στη γεωμετρική «ανακάλυψη», στο βιβλίο του μαθητή, το Π. Θ. από θεώρημα της Γεωμετρίας και των γεωμετρικών μεγεθών (ορθή γωνία, μήκη, εμβαδά) μεταλλάχθηκε σε θεώρημα της Άλγεβρας (αλγεβρική ισότητα στην οποία τα γράμματα αντικαθίσταται συνήθως από ακέραιους αριθμούς), (Κόσουβας, 2014α). Η εφαρμογή του Π. Θ. για μη ρητά μήκη μόνο στην αλγεβρική ενότητα των άρρητων είναι απρόσφορη επιλογή αφού κατακερματίζει την ολότητα και επιφέρει ασυνέχεια στη διδασκαλία.

Στο κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας του βιβλίου μαθητή της Β΄ Γυμνασίου λείπει η διαδικασία εύρεσης γωνίας, με χρήση των πλήκτρων \sin^{-1} , \cos^{-1} και \tan^{-1} του υπολογιστή τσέπης, όταν είναι γνωστός ο τριγωνομετρικός αριθμός. Επίσης, ενώ προεξάρχει η απομνημόνευση των άρρητων και ρητών αναπαραστάσεων των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 30° , 45° και 60° (ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη), απουσιάζουν προβλήματα που εστιάζουν στη διάκριση της ακριβούς και της προσεγγιστικής τιμής άρρητων μηκών (το ίδιο ισχύει και για το Π. Θ.). Επιπλέον η προσέγγιση των διανυσμάτων με τυπικές ιδότητες, διανυσματική πρόσθεση και αφαίρεση, πράξεις με μέτρα, κ.λπ. είναι αφηρημένη και ελάχιστα συνδεδεμένη με καθημερινές καταστάσεις που είναι γνώριμες στους μαθητές, όπως για παράδειγμα οι αναφορές στον τρόπο πνοής των ανέμων στα μετεωρολογικά δελτία. Για μια κριτική θεώρηση της εισαγωγής του διανύσματος (βλ. Δημητριάδου, 2008).

Τέλος, μια άλλη παρατήρηση που χαρακτηρίζει το βιβλίο μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου είναι η απουσία εργαλείων. Θα πρέπει να επισημανθεί βεβαίως ότι τη χρονική περίοδο συγγραφής του βιβλίου υπήρχαν ελάχιστοι εκπαιδευτικοί και πολύ λιγότεροι μαθητές που ήταν καταρτισμένοι στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, δεν υπήρχε επαρκής υλικοτεχνική υποδομή στα σχολεία ούτε και ανοιχτοί μαθησιακοί πόροι στο διαδίκτυο που θα επέτρεπαν την απρόσκοπτη ενσωμάτωση τέτοιου είδους δραστηριοτήτων στα σχολικά βιβλία. Στις μέρες μας όμως είναι επιτακτική ανάγκη να γίνεται ευρεία χρήση ψηφιακών εργαλείων στο διδακτικό υλικό των σχολικών βιβλίων (ΙΕΠ, 2014). Παραδείγματα ψηφιακών δραστηριοτήτων υπάρχουν στο αναθεωρημένο ΠΣΜ, στο αποθετήριο εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων «ΙΦΙΓΕΝΕΙΑ» (<http://ifigeneia.cti.gr/repository/>) και την πλατφόρμα «ΑΙΣΩΠΟΣ» του ΙΕΠ (<http://aesop.iep.edu.gr/>). Ωστόσο δεν πρέπει να παραγνωρίζεται η

θεμελιώδης παιδαγωγική σημασία των χειραπτικών μέσων και εργαλείων, όπως είναι ο κανόνας, ο διαβήτης, κ.λπ.

Συμπεράσματα

Από την προηγούμενη ανάλυση των αποτελεσμάτων ως προς τη δομή και το περιεχόμενο προκύπτει το συμπέρασμα ότι το σχολικό βιβλίο μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου εμφανίζει αμφιλεγόμενες όψεις, οι οποίες επηρεάζουν τη μαθηματική εκπαίδευση της χώρας μας.

Από τη μια πλευρά καλύπτει με επάρκεια και επιστημονική εγκυρότητα το γνωστικό περιεχόμενο του Προγράμματος Σπουδών στο οποίο βασίστηκε η συγγραφή. Επιπλέον, ορισμένες δραστηριότητες, όπως για παράδειγμα το μοντέλο της ζυγαριάς, η διερεύνηση του π , η προσέγγιση του εμβαδού του κυκλικού δίσκου από ορθογώνιο, κ.λπ., συνεισφέρουν θετικά στη γνωστική και διδακτική διάσταση του βιβλίου. Από την άλλη πλευρά το σχολικό βιβλίο υπηρετεί μια φορμαλιστική και εργαλειακή αντίληψη των μαθηματικών, η οποία έχει αρνητικό αντίκτυπο στη διδακτική πρακτική. Το βιβλίο προωθεί κυρίως τη δασκαλοκεντρική διδασκαλία και αναμερίζει σε γενικές γραμμές τα σύγχρονα ερευνητικά ευρήματα που προέρχονται από τη διδακτική των μαθηματικών. Οι μαθητές χωρίς να έχουν διερευνήσει τους ορισμούς, τις έννοιες και τους κανόνες, καλούνται να αποκτήσουν άνεση στις διαδικαστικές δεξιότητες. Επιπλέον, με τη μιμητική επανάληψη των λυμένων ασκήσεων και την εξάσκηση σε άλυτες αναμένεται να εμπεδώσουν τα βασικά θέματα των ενοτήτων.

Ένα από τα πλέον αδύνατα σημεία του βιβλίου αποτελεί η παραγνώριση της εικασίας και της διερεύνησης της κανονικότητας ή του μαθηματικού νόμου κάθε ενότητας. Ο πειραματισμός, η εικασία, ο έλεγχος υποθέσεων δεν αποτελούν προτεραιότητες του βιβλίου με αποτέλεσμα η μετάβαση από την εισαγωγική δραστηριότητα στη θεωρία να μην ευνοεί την ανακάλυψη, αλλά απλώς την παράθεση της θεωρίας. Τα συμπεράσματα της θεωρίας εκτίθενται ασύνδετα με τις πρότερες μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών, χωρίς να εξασφαλίζεται η μετεξέλιξη της άτυπης σε τυπική γνώση, η βιώσιμη κατανόηση, η εμπάθυνση και η αφομοίωση των γνώσεων, των εννοιών και των διαδικασιών. Η θεωρία παρέχεται ως ετοιμοπαράδοτο προϊόν για κατανάλωση. Οι δραστηριότητες και οι εφαρμογές του εγχειριδίου μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου είναι συνήθως ασκήσεις αλγοριθμικών διαδικασιών ή κλειστά προβλήματα και δεν ευνοούν την ανάπτυξη των μαθηματικών ως ανθρώπινης πολιτισμικής προσπάθειας ούτε αποτελούν πνευματικές προκλήσεις που ασκούν την αυτενέργεια των μαθητών. Καθώς οι εισαγωγικές δραστηριότητες παραδίδονται λυμένες, ακυρώνουν τη συμμετοχή των μαθητών στη διεργασία οικοδόμησης της γνώσης, αποθαρρύνοντάς τους να επινοήσουν τις δικές τους μεθόδους και να προβάλουν τις δικές τους αιτιολογήσεις.

Η ανάπτυξη πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και η προαγωγή της μαθηματικής δημιουργικότητας σχεδόν αγνοούνται. Αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες και καταστάσεις προβληματισμού που έχουν νόημα για τους μαθητές και διευκολύνουν τη συστηματική εμπλοκή τους στη μάθηση είναι ελάχιστες. Το βιβλίο δεν ενθαρρύνει την επικοινωνία, τη συνεργασία και την πρωτοτυπία ιδεών. Η αξιοποίηση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων και η δημιουργία και σύνδεση ισοδύναμων αναπαραστάσεων (καθημερινή γλώσσα, εικόνες, πίνακες, διαγράμματα, γραφήματα, αλγεβρικές παραστάσεις, σύμβολα) καλύπτουν μόνο μικρό μέρος του βιβλίου. Είναι

σημαντικό, οι μαθητές να έχουν πλούσιες ευκαιρίες ώστε να εικάζουν, να εφευρίσκουν και να βελτιώνουν τις δικές τους αναπαραστάσεις ως εργαλεία για την υποστήριξη της μάθησης. Πρωταρχική σημασία θα έπρεπε να έχει η ισορροπημένη ανάπτυξη διαδικαστικής γνώσης και εννοιολογικής κατανόησης και όχι η κυριαρχία τεχνικών, οι οποίες στρεβλώσουν και υποβαθμίζουν το μάθημα των μαθηματικών.

Τέλος, το βιβλίο δεν υποστηρίζει μαθηματικές διεργασίες και δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας, που κινητοποιούν τους μαθητές για την επίτευξη των στόχων της μάθησης. Με νέες καλύτερες εισαγωγικές δραστηριότητες οι μαθητές θα πρέπει να έχουν πλούσιες ευκαιρίες να σκέπτονται και να κάνουν τις δικές τους μαθηματικές ανακαλύψεις. Προτείνεται οι δραστηριότητες να είναι ανοιχτές και να μην καθοδηγούν ασφυκτικά τους μαθητές προς μοναδικές λύσεις. Μπορούν να τίθενται ενδεικτικά ερωτήματα τα οποία οι μαθητές θα διερευνήσουν ατομικά ή ομαδικά στο πλαίσιο μιας στρατηγικής ενεργητικής ανακάλυψης-διερεύνησης. Πάντως, οι “πλουσιότερες” δραστηριότητες μπορούν να υποβαθμιστούν με την παραδοσιακή διδασκαλία, ενώ ακόμα και οι “φτωχότερες” μπορούν να αναπροσαρμοστούν, να τεθούν με καλύτερο τρόπο και να αποτελέσουν γόνιμες μαθησιακές ευκαιρίες για τους μαθητές. Γι’ αυτό η συμμετοχή των εκπαιδευτικών σε έναν ευρύτατο διάλογο για τη συνδιαμόρφωση και κατάθεση κατάλληλων δραστηριοτήτων, που υποστηρίζουν την ενεργητική εμπλοκή όλων των μαθητών στη μάθηση των μαθηματικών, είναι αδήγητη και επιτακτική ανάγκη. Σε επόμενη εργασία μας θα προτείνουμε συγκεκριμένες εναλλακτικές δραστηριότητες, οι οποίες έχουν στόχο να αμβλύνουν μερικές από τις αδυναμίες του σχολικού βιβλίου.

Αναφορές

- Eisner, E. W. (1987). Why the textbook influences curriculum. *Curriculum Review*, 26(3), 11-13.
- Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28(4), 567–590.
- Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524–549.
- Hiebert, J. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Howson, G. (1995). *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts* (Vol. 3). Vancouver: Pacific Educational Press.
- Hudson, R., Lahan, P. E., & Lee, J. S. (2010). Considerations in the review and adoption of mathematics textbooks. In B. J. Reys, R. E. Reys, & R. Rubenstein (Eds.), *Mathematics curriculum: Issues, trends, and future directions* (pp. 213- 229). Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics.
- Johansson, M. (2006). *Teaching Mathematics with Textbooks. A Classroom and Curricular Perspective*. Luleå University of Technology, Luleå.
- Kosyvas, G. (2016): Levels of arithmetic reasoning in solving an open-ended problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47 (3), 356–372.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60 (1), 1-64.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276.

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*.
- Nicol, C., & Crespo, S. (2006). Learning to Teach with Mathematics Textbooks: How Preservice Teachers Interpret and Use Curriculum Materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62 (3), 331-355.
- Pepin, B. (2008). Μια διεθνής σύγκριση των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών και της χρήσης τους από τους εκπαιδευτικούς – ποια εικόνα των μαθηματικών παρουσιάζουν στους μαθητές τα σχολικά βιβλία στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7^ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008* (σσ. 21-54). Θεσσαλονίκη.
- Pingel, F. (2000). *The European home: representations of 20th century Europe in history textbooks*. Strasbourg, Council of Europe.
- Programme for International Students Assessment (2013). *PISA 2015 Draft Collaborative Problem Solving Framework*. Retrieved on 26 Dec 2015 from <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2015draftframeworks.htm>
- Reys, B. J., Reys, R. E., & Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61-66.
- Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 687-709). New York: Macmillan; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schmidt, W. H., Houang, R., & Cogan, L. (2002). A coherent curriculum: The case of mathematics. *American Educator*, 26(2), 10–26, 47–48.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
- Stein, M. K., & Kim, G. (2009). The role of mathematics curriculum materials in large-scale urban reform. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 37-55). New York: Routledge.
- Stouraitis, K., Potari, D., & Skott, J. (2015). Contradictions and shifts in teaching with a new curriculum: the role of mathematics. *Paper presented in CERME9* (pp. 3262-3268), Prague.
- Tarr, J., Reys, B., Barker, D., & Billstein, R. (2006). Selecting high-quality Mathematics Textbooks. *Mathematics teaching in the middle school*, 12(1), 50–54.
- Trends in International Mathematics and Science Study (2013). *TIMSS 2015 Assessment Frameworks*. Ina V.S. Mullis & Michael O. Martin (Editors). TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Valverde, G., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W., & Houang, R. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer.
- Βερύκιος, Π. (2009). Τα σχολικά βιβλία μαθηματικών: θεωρία και πράξη. *Ευκλείδης Γ'*, 70, 87-98, Αθήνα.
- Βισκαδουράκης, Β. (2004). Συζήτηση για τα αναλυτικά προγράμματα Μαθηματικών. *Το φ, Περιοδική έκδοση επικοινωνίας και διαλόγου στα Μαθηματικά*, 113-127, Αθήνα.
- Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Βιβλίο μαθητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- Βόσκογλου, Μ. & Κόσουβας, Γ. (2012). Ο ρόλος των αναπαραστάσεων για την κατανόηση των πραγματικών αριθμών. *Ευκλείδης Γ'*, 76, σσ. 11-49. Αθήνα: ΕΜΕ.
- Γκίνης, Δ., & Πιτέρη, Σ. (2008). Εκπαιδευτική έρευνα για τη διδασκαλία των μαθηματικών του Γυμνασίου με τα νέα βιβλία – στάσεις και απόψεις των εκπαιδευτικών. *Πρακτικά 25ου συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 575-592). Βόλος: ΕΜΕ.
- Δημητριάδου, Ε. (2008). Επαναφορά της διδασκαλίας των διανυσμάτων στο Γυμνάσιο: Καλές προθέσεις αλλά ... *Πρακτικά 2ης Μαθηματικής εβδομάδας* (σσ. 89-101). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

- Δημητριάδου, Ε., Θωμαΐδης, Γ., Οικονόμου, Π., & Σταφυλίδου, Μ. (2009). *Η εισαγωγή των νέων βιβλίων των μαθηματικών στο γυμνάσιο*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.
- Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2014). *Πρόγραμμα Σπουδών στα Μαθηματικά Α'-Γ' Γυμνασίου*. Αθήνα: Αναθεωρημένη Έκδοση.
- Καλαβάσης, Φ. (1997). Ρόλος των προβλημάτων στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 47, 37 - 50.
- Καλαβάσης, Φ. (2007). Τα νέα σχολικά βιβλία. *Πρακτικά 24ου συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 55-59). Κοζάνη: ΕΜΕ.
- Καραγεώργος, Δ. (1998). Το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών και τα Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Γενικής Εκπαίδευσης. *Ευκλείδης Γ'*, 47-48-49-50, 89-94. Αθήνα: ΕΜΕ
- Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (ΚΕΕ) (2007). *PISA: Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση των Μαθητών*. Αθήνα: ΕΠΤΑΛΟΦΟΣ.
- Κολέζα, Ε. (1997). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Πρακτικά 14ου συνεδρίου της ΕΜΕ*, Μυτιλήνη.
- Κολέζα, Ε. (2006). Σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών: Α' Μέρος: Ένα θεωρητικό πλαίσιο αξιολόγησης. *Ευκλείδης Γ'*, 65, σελίδες 3—27. Αθήνα: ΕΜΕ.
- Κολέζα, Ε. (2007α). Προγράμματα Σπουδών για τα μαθηματικά: το ... μετέωρο βήμα της μεταρρύθμισης. *Πρακτικά 24ου συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 26-49). Κοζάνη: ΕΜΕ.
- Κολέζα, Ε. (2007β). Τα νέα σχολικά βιβλία. *Πρακτικά 24ου συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 60-64). Κοζάνη: ΕΜΕ.
- Κολέζα, Ε. (2007γ). Σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών: Β' Μέρος: Γνωσιακή και Κοινωνιολογική ανάλυση. *Ευκλείδης Γ'*, 66, σελίδες 3—24. Αθήνα: ΕΜΕ.
- Κόσουβας, Γ. (2014α). Αριθμητική προσέγγιση ή γεωμετρική ακρίβεια; Αυθόρμητες αντιλήψεις δωδεκάχρονων που αγγίζουν την αρρητότητα. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 7, 11-50. Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ.
- Κόσουβας, Γ. (2014β). Διερεύνηση της σχέσης εμβαδού-περιμέτρου με το μοντέλο Van Hiele, *Ευκλείδης Γ'*, 81, 21-60. Αθήνα: ΕΜΕ.
- Λυμπεροπούλου, Ε. & Παπαδάκη, Μ. (2008). Τα νέα βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου τα τρία «παιδαγωγικά αξιώματα» και η κρυμμένη αντι-διδακτική αντιστροφή. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7^ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008* (σσ. 195-210). Θεσσαλονίκη.
- Μπαρालός, Γ. (2009). Η χρήση των νέων βιβλίων Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ'*, 53-64. Αθήνα: ΕΜΕ.
- Νέο Σχολείο, (2011). *Οδηγός Εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου*. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο-ΥπΔΒΜ.
- Πρίντζης, Γ. (2007). Επισημάνσεις στα νέα σχολικά βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου. *Πρακτικά 24ου συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 208-218). Κοζάνη: ΕΜΕ.
- Ρίζος, Γ. (2007). Καινοτόμες δραστηριότητες- διόγκωση της ύλης: οι αντιφάσεις των νέων βιβλίων Μαθηματικών του Γυμνασίου. *Πρακτικά 1ης Μαθηματικής εβδομάδας* (σσ. 427-448). Θεσσαλονίκη: ΕΜΕ-παράρτημα κεντρικής Μακεδονίας.
- Σκούρας, Α. (2002α). Δραστηριότητες και διδακτική πράξη: από την ανάπτυξη της εμπειρίας στη μαθηματοποίησή της. *Μέντωρ*, 6, 105 -120. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.
- Σκούρας, Α. (2002β). Εμπλουτίζοντας τη διδασκαλία των Μαθηματικών με διαθεματικές προσεγγίσεις. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7, 101-110. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.
- Τσικοπούλου, Σ. (2008). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στα σχολικά βιβλία μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7^ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008* (σσ. 211-223). Θεσσαλονίκη.
- Υπουργείο Παιδείας (1997). Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών.
- Υπουργείο Παιδείας (2003). Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ. ΦΕΚ, τ. Β', 303/13-3-2003 από <http://www.pi-schools.gr/programs/depps/>
- Υπουργείο Παιδείας (2011). Απόφαση για «Έγκριση Προγραμμάτων Σπουδών Πρωτοβάθμιας & Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης για την Πιλοτική τους Εφαρμογή του διδακτικού πεδίου Μαθηματικά». Αριθμ Πρωτ 113730/Γ2/03-10-2011 (ΦΕΚ 2281 Β', σελ 31473—31691).

- Φακούδης, Ε. (2008). Ερωτήματα που οι απαντήσεις τους θέτουν υπό αναίρεση την επιχειρούμενη εκπαιδευτική μεταρρύθμιση στα μαθηματικά. *Πρακτικά 25ου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας* (σσ. 826-839). Βόλος: ΕΜΕ.
- Φερεντίνος, Σ. (2001). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 5, 7 - 21. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.
- Φερεντίνος, Σ. (2007). Νέα βιβλία μαθηματικών του Γυμνασίου. *Πρακτικά 24ου συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 68-74). Κοζάνη: ΕΜΕ.
- Χασάπης, Δ. (2008). Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών: ένα πρόβλημα υπό διαρκή διερεύνηση. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008* (σσ. 11-20). Θεσσαλονίκη.
- Χιονίδου - Μοσκοφόγλου, Μ. (2002). Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7, 80 - 100. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.