

Διδασκαλία των ιδιοτήτων του ορθικού τριγώνου με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας

Ανδρέας Κουλούρης
akoulouris13@gmail.com

Μαθηματικός, 3^ο Λύκειο Γαλατσίου

Περίληψη. Η παρούσα πρόταση διδασκαλίας αναφέρεται στη διδασκαλία ενός μαθήματος της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου στο σχολικό εργαστήριο, με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra. Το συγκεκριμένο μάθημα, αφορά στην ανακάλυψη από τους μαθητές της βασικής ιδιότητας του ορθικού τριγώνου καθώς και άλλων ιδιοτήτων του σχήματος και κατόπιν την αιτιολόγηση και απόδειξη των ιδιοτήτων αυτών. Με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή και του κατάλληλου λογισμικού και με την εργασία των μαθητών σε ομάδες, προάγεται η ενεργός συμμετοχή τους στην ανακάλυψη της μαθηματικής γνώσης, ο πειραματισμός, η διατύπωση και ο έλεγχος εικασιών καθώς και η κοινωνική τους αλληλεπίδραση. Η διδακτική αυτή πρόταση μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί και να εφαρμοστεί σε πάμπολλες περιπτώσεις και προτείνεται κυρίως για την ευκολία με την οποία μπορεί να ενταχθεί στην καθημερινή σχολική πρακτική, σε σχέση με τα διδακτικά οφέλη που προσφέρει.

Λέξεις κλειδιά: Νέες Τεχνολογίες, GeoGebra, Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας

Εισαγωγή

Στην εποχή της πληροφορίας, η υπολογιστική τεχνολογία εισβάλλει στη μαθηματική εκπαίδευση. Οι τρόποι αξιοποίησης των ψηφιακών εργαλείων στη σχολική τάξη των μαθηματικών και ιδιαίτερα η φύση και τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων στις οποίες θα κληθούν να εμπλακούν μαθητές και εκπαιδευτικοί έχουν αποτελέσει εδώ και χρόνια κεντρικό σημείο αιχμής στο πλαίσιο του ευρύτερου προβληματισμού που αφορά στην ένταξη της ψηφιακής τεχνολογίας στο σχολείο (diSessa et al., 1995)

Στη διδασκαλία της γεωμετρίας τα διαθέσιμα προς διδακτική αξιοποίηση λογισμικά χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες: η πρώτη αφορά στα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, με κυριότερους εκπροσώπους τα *GeoGebra*, *Geometer Sketchpad* και *Cabri Geometry* και η δεύτερη τα λογισμικά συμβολικής έκφρασης, όπως ο *Χελωνόκοσμος*. Θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε μια διδακτική πρόταση που αξιοποιεί το λογισμικό GeoGebra στη διδασκαλία της ευκλείδειας γεωμετρίας στην Α΄ λυκείου, η οποία μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί και να έχει τη μέγιστη δυνατή εφαρμογή στην καθημερινή σχολική πρακτική.

Στόχος της παρούσας πρότασης διδασκαλίας είναι οι μαθητές, με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra, να διερευνήσουν και να ανακαλύψουν τη *βασική ιδιότητα του ορθικού τριγώνου*, ότι δηλαδή τα ύψη του αρχικού τριγώνου είναι διχοτόμοι του ορθικού. Επιπροσθέτως να ανακαλύψουν ποιες γωνίες είναι ίσες στο σχήμα που προκύπτει αν φέρουμε τα ύψη ενός τριγώνου και σχηματίσουμε το ορθικό τρίγωνο και ποια τετράπλευρα είναι εγγράψιμα, ανακαλύψεις που αναμένεται να τους υποβοηθήσουν στην προσπάθειά τους να αποδείξουν την προαναφερθείσα βασική ιδιότητα του ορθικού τριγώνου.

Θεωρητικό πλαίσιο

Σύμφωνα με τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης, η διδασκαλία οφείλει να απομακρυνθεί από το παραδοσιακό μοντέλο της μετωπικής διδασκαλίας, επιδιώκοντας μεγαλύτερη συμμετοχή και αυτενέργεια του μαθητή για την οικοδόμηση της γνώσης (Glaserfeld, 1991) μέσα από την κοινωνική αλληλεπίδραση με τους συμμαθητές του (Vygotsky, 1978). Η εισαγωγή των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση δίνει επιπλέον δυνατότητες, όπως το σχεδιασμό ερευνητικών δραστηριοτήτων που αφορούν όχι μόνο στο πεδίο μάθησης αλλά και στο πεδίο της επικοινωνίας και της διαπραγμάτευσης, σε ένα κοινωνικό πλαίσιο που συνιστά η σχολική τάξη.

Η παρούσα διδακτική πρόταση, όπως και γενικότερα η αξιοποίηση των εκπαιδευτικών λογισμικών στη διδασκαλία και η εργασία των μαθητών σε ομάδες, συμβάλει στην αλλαγή - βελτίωση της στάσης τους απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους (Κυνηγός, επιμ. 2010). Οι μαθητές αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι η γεωμετρία μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα κάθε μαθητής να δοκιμάσει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες, οι οποίες θα πρέπει να έχουν την ανάλογη κοινωνική αποδοχή στο πλαίσιο της τάξης αλλά και επιστημονική τεκμηρίωση.

Η εφαρμογή των ΤΠΕ καθιστά τον τρόπο προσέγγισης του διδακτικού αντικείμενου πιο ελκυστικό, καθώς οι μαθητές μετακινώντας ελεύθερα ορισμένα στοιχεία του σχήματος μπορούν, μέσω οπτικών αλληλεπιδράσεων, να παρατηρήσουν πως ανταποκρίνεται το σχήμα δυναμικά σε αυτές τις αλλαγές. Πιο συγκεκριμένα, στα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, οι μαθητές αρχικά θα πρέπει να κατασκευάσουν το σχήμα, δηλαδή ένα στιγμιότυπο της κλάσης με τις ιδιότητες της εκφώνησης. Κατόπιν θα πρέπει να το «σύρουν», ώστε να επαληθεύσουν ότι οι ιδιότητες έχουν δοθεί σωστά. Στη συνέχεια με όλους τους τρόπους συρσίματος μπορούν να διατυπώσουν δικά τους «θεωρήματα» για επιμέρους λύσεις ή για ολοκληρωμένη λύση (Κυνηγός, 2011)

Η συμβολή του εκπαιδευτικού σε μια τέτοια δραστηριότητα απαιτεί αλλαγή του ρόλου του και από παραδοσιακός καθηγητής μετωπικών διδασκαλιών και αυθεντία της γνώσης καλείται να γίνει συνεργάτης των μαθητών του και σημείο αναφοράς της τάξης του ως προς την καθοδήγηση της έρευνας και την επιστημονική εγκυρότητα των συμπερασμάτων των μαθητών (Κυνηγός, επιμ. 2010).

Περιγραφή της διδακτικής πρότασης

Αφετηρία για την κατασκευή της παρούσας διδακτικής πρότασης ήταν η αποδεικτική άσκηση 3 στη σελίδα 134 του σχολικού βιβλίου της γεωμετρίας της Α' λυκείου, που αφορά στο ορθικό τρίγωνο (Σχήμα 1). Η άσκηση αυτή βρίσκεται στην παράγραφο 6.5 «Εγγεγραμμένα και Εγγράψιμα Τετράπλευρα».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο:
 - i) Τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών είναι ίσα. Σ Λ
 - ii) Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. Σ Λ
 Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.
2. Αν $ABΓΔ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο τότε:
 - α. $\hat{A} + \hat{\Gamma}_{εζ} = 2\angle$ β. $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ γ. $\hat{A} = \hat{\Delta}_{εζ}$
 - δ. $\hat{A} = \hat{\Gamma}_{εζ}$ ε. $\hat{B} = \hat{\Delta}$
 Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. Από τέσσερα μη συνευθειακά σημεία διέρχεται πάντοτε ένας κύκλος;
4. i) Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο;
 ii) Αν οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;

Αποδεικτικές Ασκήσεις

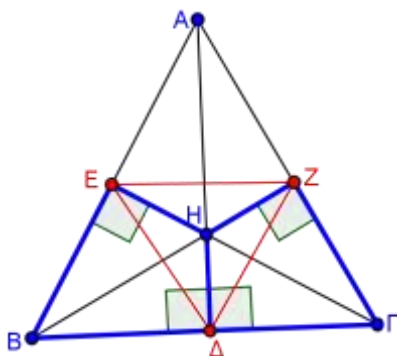
1. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B . Από τα A και B φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ' και τον άλλο στα Δ και Δ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$.
2. Ένας κύκλος (K) διέρχεται από τις κορυφές B και Γ τριγώνου $AB\Gamma$ και τέμνει τις πλευρές AB , $A\Gamma$ στα σημεία Δ , E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη ϵ του περιγεγραμμένου κύκλου στο A .
3. Να αποδείξετε ότι τα ύψη AD , BZ , ΓE ενός τριγώνου $AB\Gamma$ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E Z$.
4. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Σύνθετα Θέματα

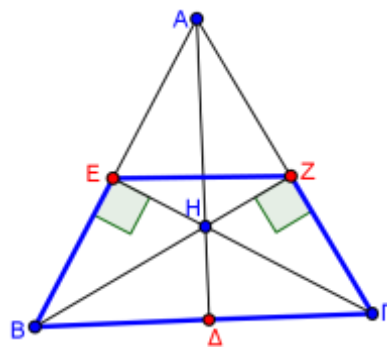
1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (O, R). Αν BD και ΓE είναι ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι $OA \perp \Delta E$ (Θεώρημα Nagel).

Σχήμα 1: Η άσκηση του σχολικού βιβλίου που αποτέλεσε αφορμή για την κατασκευή της δραστηριότητας.

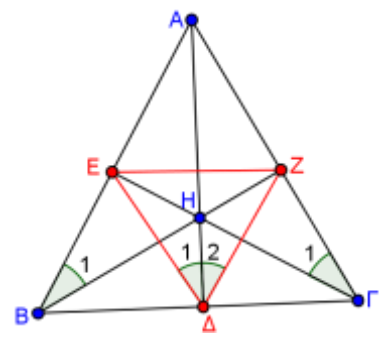
Πρόκειται για μια απαιτητική άσκηση για την πλειοψηφία των μαθητών. Οι μαθητές θα πρέπει να ανακαλύψουν ότι από τα ύψη του αρχικού τριγώνου προκύπτει η εγγραψιμότητα των τριών τετραπλεύρων (Σχήμα 2, Σχήμα 3) και κατόπιν ότι από τις ιδιότητες των εγγράψιμων αυτών τετραπλεύρων προκύπτουν οι ισότητες των γωνιών που ζητούνται (Σχήμα 4).



Σχήμα 2



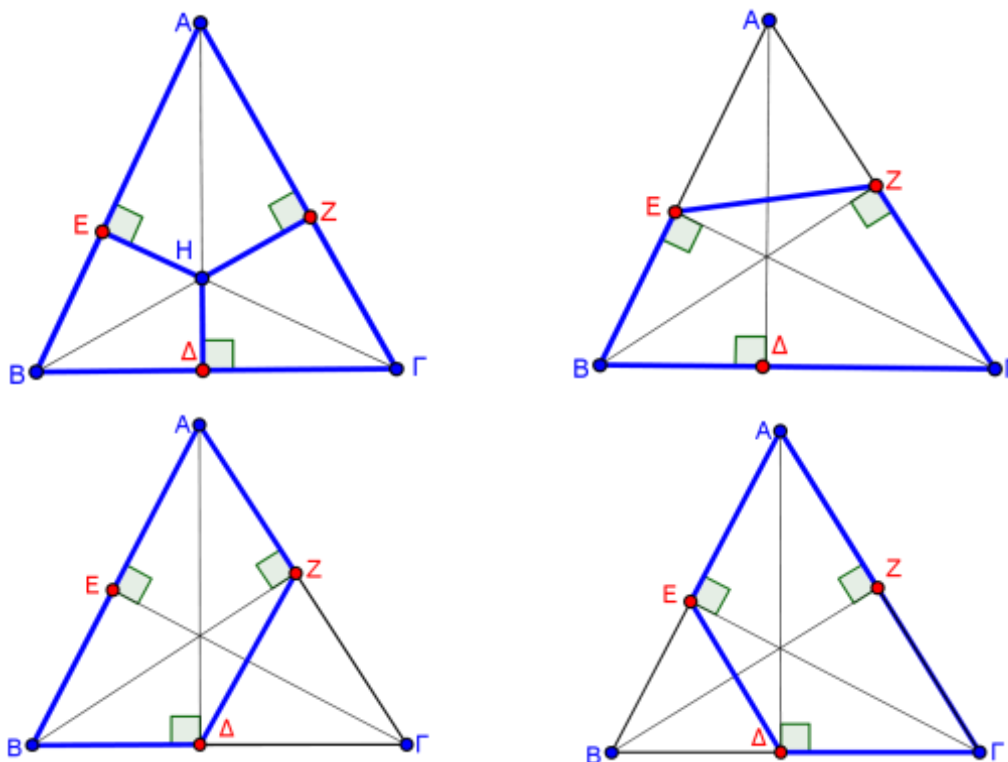
Σχήμα 3



Σχήμα 4

Η παραδοσιακή, μετωπική διδασκαλία της άσκησης αυτής απαιτεί μία διδακτική ώρα, ώστε να δοθεί χρόνος στους μαθητές να προσπαθήσουν να την επιλύσουν, ατομικά ή ανά θρανίο, και κατόπιν, με τη βοήθεια του διδάσκοντα, να γίνει η διαπραγμάτευση της απόδειξης στον πίνακα. Η απόδειξη αυτή συνήθως διδάσκεται δίχως περισσότεροι μαθητές να αναρωτηθούν αν τα τετράπλευρα που αναφέρονται στις σχήματα 2 και 3 είναι τα μοναδικά που υπάρχουν στο σχήμα, δεν προβληματίζονται και δεν ανακαλύπτουν τα

υπόλοιπα 3 εγγεγραμμένα τετράπλευρα του σχήματος (συνολικά 6, σχήμα 5), ούτε τις πάμπολλες ίσες γωνίες που υπάρχουν στο σχήμα.



Σχήμα 6: Τα έξι εγγεγραμμένα τετράπλευρα του σχήματος, τα τρία από αυτά στο πάνω αριστερά τρίγωνο και από ένα σε καθένα από τα υπόλοιπα τρίγωνα.

Η εναλλακτική διδακτική πρόταση που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία αφορά σε δύο διδακτικές ώρες στο εργαστήριο των υπολογιστών με χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας GeoGebra. Την πρώτη ώρα στο εργαστήριο οι μαθητές, εργαζόμενοι σε ομάδες, θα διερευνήσουν και θα ανακαλύψουν τα εγγράψιμα τετράπλευρα και τις ίσες γωνίες που περιλαμβάνονται στο σχήμα ενός τριγώνου, των υψών του και του ορθικού τριγώνου που σχηματίζεται από τους πόδες των υψών και θα προσπαθήσουν να αιτιολογήσουν τις ανακαλύψεις-εικασίες τους. Τη δεύτερη διδακτική ώρα, με τη βοήθεια του διδάσκοντα, θα προσπαθήσουν να διατυπώσουν την εκφώνηση της άσκησης και να κάνουν την απόδειξή της. Η διαπραγμάτευση της απόδειξης αναμένεται να γίνει από τους μαθητές με μεγαλύτερη ευχέρεια, λόγω των διερευνήσεων της πρώτης διδακτικής ώρας.

1η διδακτική ώρα

Η διδασκαλία υλοποιήθηκε το διδακτικό έτος 2013-14 στο τμήμα Α₃ του 3^{ου} Λυκείου Γαλασίου. Το τμήμα αποτελείται από 19 μαθητές, 10 από τους οποίους με εξαιρετικές επιδόσεις στα μαθηματικά, 5 μέτριας επίδοσης και 4 με πολύ χαμηλή επίδοση, οι οποίοι δυσκολεύονται ακόμα και να σχεδιάσουν μια κάθετη ευθεία.

Πριν πραγματοποιηθεί η διδασκαλία, στο συγκεκριμένο τμήμα είχε διδαχθεί η θεωρία της παραγράφου των εγγεγραμμένων και εγγράψιμων τετραπλεύρων και είχαν λυθεί απλές ασκήσεις. Προηγουμένα, κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους, οι μαθητές είχαν χρησιμοποιήσει το λογισμικό GeoGebra τρεις ακόμη φορές και ήταν εξοικειωμένοι με τις

βασικές του λειτουργίες. Παρόλα αυτά, η παρούσα διδακτική πρόταση προτείνεται και για μαθητές που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με το προαναφερθέν λογισμικό.

Οι μαθητές κάθισαν ανά δύο μπροστά από ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή στο εργαστήριο των υπολογιστών του σχολείου, σχηματίζοντας 9 ομάδες (εκτός από μια ομάδα που αποτελείται από 3 μαθητές). Η σύνθεση των ομάδων δεν καθορίστηκε από τον εκπαιδευτικό αλλά έγινε τυχαία σύμφωνα με τις φιλίες των μαθητών και τη σειρά με την οποία μπήκαν στο εργαστήριο. Σε κάθε ομάδα μοιράστηκε το παρακάτω φύλλο εργασίας (Σχήμα 7).

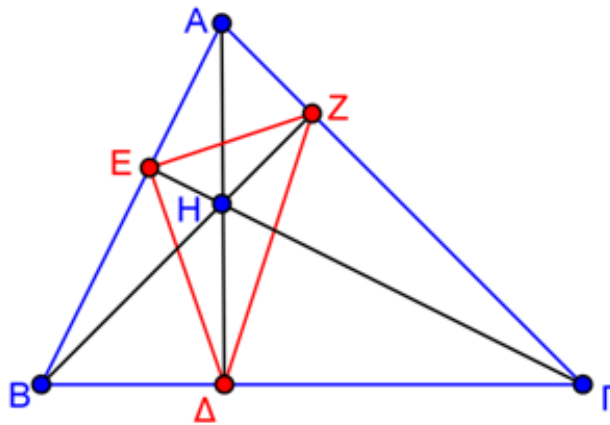
Διερεύνηση του Ορθικού Τρίγωνου με το Λογισμικό GeoGebra Φύλλο Εργασίας

Να ανοίξετε το λογισμικό GeoGebra και να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του AD , BZ και $ΓΕ$. Κατόπιν να σχηματίσετε το τρίγωνο $ΔΕΖ$ και να του δώσετε κόκκινο χρώμα. Το τρίγωνο αυτό ονομάζεται «**Ορθικό Τρίγωνο του $AB\Gamma$** ».

α) Να μετρήσετε γωνίες του σχήματος και να βρείτε ποιες είναι ίσες μεταξύ τους.

β) Να βρείτε στο σχήμα εγγράψιμα τετράπλευρα.

γ) Να αιτιολογήσετε πρώτα γιατί τα τετράπλευρα είναι εγγράψιμα (όσα ανακάλυψε η ομάδα σας) και κατόπιν γιατί οι γωνίες είναι ίσες (όσες ιδιότητες ανακαλύψατε).



Σχήμα 7: Το φύλλο εργασίας που μοιράστηκε σε κάθε ομάδα μαθητών.

Πριν ξεκινήσει η δραστηριότητα των ομάδων έγινε παρουσίαση από το διδάσκοντα, στο βιντεοπροβολέα του εργαστηρίου, των λειτουργιών του λογισμικού που αφορούν στη συγκεκριμένη διερεύνηση. Ο διδάσκων παρουσίασε τον τρόπο που οι μαθητές μπορούν, με τη βοήθεια του λογισμικού, να κατασκευάσουν το αρχικό τρίγωνο και τα ύψη του, να μετρήσουν γωνίες και να σύρουν το σχήμα ώστε να διαπιστώσουν αν οι ιδιότητες-εικασίες που ανακάλυψαν εξακολουθούν να ισχύουν.

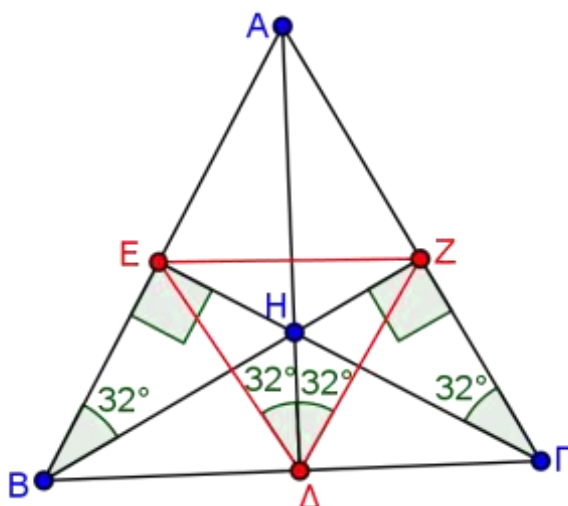
Η όλη παρουσίαση και η σύντομη εισαγωγική συζήτηση κατά τη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση διήρκεσε 9 λεπτά. Ο διδάσκων εξασφάλισε ότι όλοι οι μαθητές παρακολούθησαν προσεκτικά την αρχική παρουσίαση, κανείς δεν μιλούσε και κανείς δεν κοίταζε την οθόνη του υπολογιστή του για να δοκιμάσει ίσως κάτι από αυτά που έδειχνε ο διδάσκων εκείνη τη στιγμή. Είναι προφανές ότι αν κάποιες ομάδες δεν παρακολουθήσουν

την αρχική επίδειξη των βασικών εργαλείων του λογισμικού που θα χρησιμοποιηθούν στη συγκεκριμένη δραστηριότητα η διδασκαλία δεν θα έχει τα αναμενόμενα αποτελέσματα.

Ευρήματα των μαθητών

Σχεδόν όλες οι ομάδες κατασκεύασαν το σχήμα δίχως να χρειαστούν βοήθεια από το διδάσκοντα, μιας και οι ενέργειες που απαιτούνταν στο λογισμικό ήταν σχετικά απλές και επιπροσθέτως είχε γίνει επίδειξή τους στο βιντεοπροβολέα.

Η ανακάλυψη των ίσων γωνιών έγινε σχετικά εύκολα, ακόμα και από τους μαθητές με χαμηλή επίδοση, μιας και απαιτείται μόνο μέτρηση με τη βοήθεια του λογισμικού και απλή παρατήρηση (π.χ. **Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**). Σε κάποιες ομάδες ο διδάσκων υπενθύμισε να ελέγξουν αν οι ισότητες των γωνιών που έχουν ανακαλύψει εξακολουθεί να ισχύει και μετά το σύρσιμο κάποιου σημείου. Οι περισσότερες ομάδες όμως το έκαναν από μόνες τους, μιας και το θέμα αυτό είχε συζητηθεί κατά τη διάρκεια της αρχικής παρουσίασης αλλά και είχε εμπεδωθεί από προηγούμενες διερευνήσεις με το ίδιο λογισμικό.



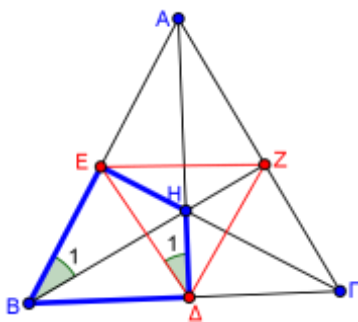
Σχήμα 7: Στιγμιότυπο της διερεύνησης που δείχνει τέσσερις ίσες γωνίες

Η δεύτερη ερώτηση του φύλλου εργασίας ζητούσε από τους μαθητές να ανακαλύψουν τα εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος. Η ανακάλυψη που ζητείται είναι μια απαιτητική μαθηματική δραστηριότητα, αφού προϋποθέτει τη γνώση των σχετικών κριτηρίων καθώς και η δυνατότητα των μαθητών να αναγνωρίσουν τα εγγράψιμα τετράπλευρα μέσα στο πολύπλοκο γεωμετρικό σχήμα που είχαν κατασκευάσει. Παρόλα αυτά, οι περισσότερες ομάδες ανακάλυψαν σταδιακά, συνεργαζόμενες πολλές φορές και μεταξύ τους, και τα 6 εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος. Μια δυο ομάδες που αποτελούνταν από αδύνατους μαθητές ρώτησαν τις διπλανές τους ομάδες και υποβοηθούμενες ανακάλυψαν κάποια από τα εγγράψιμα τετράπλευρα. Ο διδάσκων περνούσε από κάθε ομάδα, συζητούσε σχετικά με τα ευρήματά της και ενθάρρυνε τους μαθητές να συνεχίσουν τη διερεύνηση.

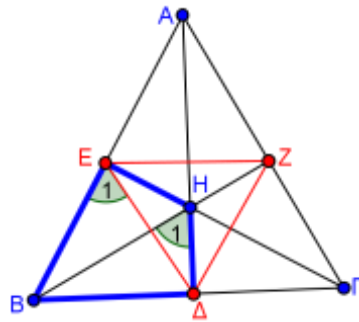
Η τρίτη ερώτηση του φύλλου εργασίας αφορούσε στην αιτιολόγηση των εικασιών που είχαν διατυπώσει οι μαθητές. Μάλιστα τους καθοδηγούσε να αιτιολογήσουν πρώτα την εγγραψιμότητα των τετραπλεύρων και κατόπιν τις ισότητες των γωνιών. Η ερώτηση αυτή

παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον και στη συνέχεια θα επιχειρηθεί να παρουσιαστούν κάποιες από τις συζητήσεις μεταξύ μαθητών και διδάσκοντος.

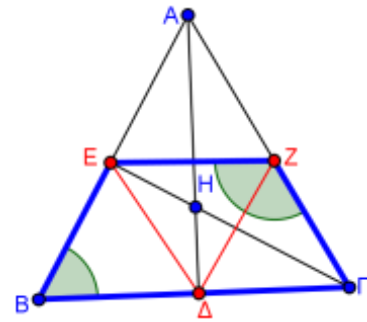
Τρεις ομάδες αποτελούμενες από μαθητές με υψηλές επιδόσεις, βοηθούμενες και από το λογισμικό, αιτιολόγησαν απόλυτα σωστά την εγγραψιμότητα των τετραπλεύρων που ανακάλυψαν. Χρησιμοποίησαν τα ύψη, σχεδίασαν τις ορθές γωνίες και είπαν ότι τα δύο τετράπλευρα είναι εγγράψιμα, αφού δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές (ως ορθές) και το τρίτο διότι μια πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. Στη συνέχεια αιτιολόγησαν και την ισότητα των γωνιών με βάση τις την εγγραψιμότητα των προαναφερθέντων τετραπλεύρων και όχι τα ευρήματα των μετρήσεων των γωνιών με τη βοήθεια του λογισμικού. Αυτό δεν το έκαναν και για τα έξι εγγράψιμα τετράπλευρα, ο διδάσκων όμως τους ενθάρρυνε και ζήτησε να ανακαλύψουν και τα υπόλοιπα που βρίσκονται στο σχήμα, πράγμα που οι 3 αυτές ομάδες το πέτυχαν μέσα στη διδακτική ώρα.



Σχήμα 8



Σχήμα 9




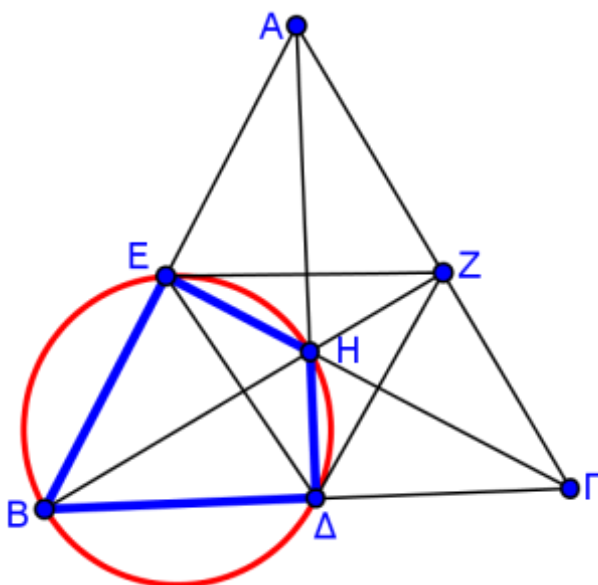
Σχήμα 10


Οι υπόλοιπες ομάδες διαφοροποιήθηκαν σε σχέση με τα προαναφερθέντα. Μια ομάδα ισχυρίστηκε ότι το τετράπλευρο ΒΔΗΕ είναι εγγράψιμο (**Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.8**), επειδή οι γωνίες B_1 και Δ_1 είναι ίσες, βασιζόμενη στη μέτρηση των γωνιών με τη βοήθεια του λογισμικού, παρά το ότι το φύλλο εργασίας ζητά να αιτιολογηθεί πρώτα η εγγραψιμότητα των τετραπλεύρων και κατόπιν η ισότητα των γωνιών. Ομοίως μια άλλη ομάδα ότι το ίδιο τετράπλευρο είναι εγγράψιμο επειδή οι γωνίες E_1 και H_1 είναι ίσες (Σχήμα 99). Μια τρίτη ομάδα ισχυρίστηκε ότι το ΒΓΖΕ είναι εγγράψιμο επειδή οι γωνίες Β και Ζ είναι παραπληρωματικές (Σχήμα 1010). Οι υπόλοιπες ομάδες είχαν παρόμοια ευρήματα, που αφορούσαν εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος, που δεν σημειώνονται στις σχήματα 8, 9 και 10, αλλά παρουσιάστηκαν στο σχήμα 5.

Ο διδάσκων ρώτησε τις συγκεκριμένες ομάδες αν μπορούν να αιτιολογήσουν και το γιατί οι γωνίες είναι ίσες. Εδώ ήρθαν σε δύσκολη θέση και κάποιοι μαθητές απάντησαν ότι οι γωνίες είναι ίσες επειδή τα τετράπλευρα είναι εγγράψιμα, ενώ προηγούμενα είχαν ισχυριστεί ακριβώς το αντίστροφο. Το θέμα συζητήθηκε μεταξύ μαθητών αλλά και με το διδάσκοντα. Υπήρξε προβληματισμός για το πιο είναι το σωστό, το ευθύ ή το αντίστροφο, ή ακόμη και αν είναι και τα δύο σωστά. Μετά από αρκετή συζήτηση με πολλές ομάδες και με τη βοήθεια του διδάσκοντα, οι μαθητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ισότητα των ορθών γωνιών που σχηματίζουν τα ύψη του αρχικού τριγώνου και η ισότητα των υπολοίπων γωνιών που μας αποκαλύπτει το λογισμικό με τα εργαλεία μέτρησης που διαθέτει διαφέρουν, όσον αφορά στην χρησιμότητά τους κατά την αποδεικτική διαδικασία. Κάθε αιτιολόγηση ενός ισχυρισμού οφείλει να χρησιμοποιεί και να βασίζεται στα δεδομένα της άσκησης και σε ότι έχει αιτιολογηθεί προηγούμενα με τον ίδιο τρόπο και όχι απλά στην ισότητα μετά από παρατήρηση. Έτσι λοιπόν, στην παρούσα περίπτωση, η αφετηρία της

απόδειξης-αιτιολόγησης οφείλει να ξεκινήσει από τις ορθές γωνίες που σχηματίζουν τα ύψη με τις πλευρές του αρχικού τριγώνου, με βάση αυτές να αποδειχτεί ότι τα τετράπλευρα είναι εγγράψιμα και τέλος από την εγγραψιμότητα των τετραπλεύρων να προκύψει η ισότητα των γωνιών.

Εμφανίστηκαν όμως και αιτιολογήσεις που δεν ήταν αναμενόμενες από το διδάσκοντα και κατασκευαστή της δραστηριότητας. Μια ομάδα ανακάλυψε το εικονίδιο  του λογισμικού (κύκλος που διέρχεται από τρία σημεία). Ισχυρίστηκε λοιπόν ότι το τετράπλευρο ΒΔΗΕ είναι εγγράψιμο (**Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**) διότι πατώντας το προαναφερθέν εικονίδιο και κατόπιν τρεις από τις κορυφές του τετραπλεύρου, ο κύκλος που σχηματίζεται διέρχεται και από την τέταρτη κορυφή, γεγονός που διατηρείται κατά το σύρσιμο οποιουδήποτε σημείου και σε οποιαδήποτε μετακίνηση του σχήματος. Το νέο μάλιστα διαδόθηκε γρήγορα και στις διπλανές ομάδες και με τον τρόπο αυτό ανακαλύφθηκαν από τις ομάδες αυτές αρκετά εγγράψιμα τετράπλευρα. Ο διδάσκων χαρακτήρισε τους μαθητές της ομάδας αυτής *πονηρούς* και αποδέχθηκε την ανακάλυψή τους, απλά τους διευκρίνισε ότι η ανάγκη αιτιολόγησης του ισχυρισμού, με βάση γεωμετρικές ιδιότητες, εξακολουθεί να ισχύει. Κατόπιν μετά από συζήτηση των συγκεκριμένων ομάδων μεταξύ τους και με το διδάσκοντα προέκυψε ως συμπέρασμα ότι η χρήση του συγκεκριμένου εικονιδίου βοηθά στην ανακάλυψη εγγράψιμων τετραπλεύρων, όχι όμως στην αιτιολόγηση του γιατί είναι εγγράψιμα.



Σχήμα 11: Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου ΒΔΗΕ, όπως σχηματίστηκε από ομάδα μαθητών, πατώντας το εικονίδιο  «κύκλος που διερχεται από 3 σημεία» του λογισμικού.

Η πρώτη διδακτική ώρα στο εργαστήριο κύλησε με τον τρόπο αυτό. Οι εικασίες των μαθητών δεν περιορίστηκαν στα 3 εγγράψιμα τετράπλευρα που χρειάζονται για την απόδειξη της άσκησης (π.χ. αυτά των εικόνων 2 και 3) αλλά με την παρότρυνση του διδάσκοντα αφορούσαν και στα 6 εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος και τις γωνίες που αυτά περιέχουν (σχήμα 5).

Όποιος έχει κάποια έστω εμπειρία της εργασίας των μαθητών σε ομάδες γνωρίζει ότι είναι πολύ δύσκολο, ή ακόμα και αδύνατο κάποιες φορές, να διακόψεις τους μαθητές όταν

εργάζονται ομαδικά, συζητούν, αυτενεργούν και έχουν εμπλακεί πλήρως στην διερεύνηση που τους ζητήθηκε. Καλό θα ήταν λοιπόν ο εκπαιδευτικός να αποφεύγει να διακόψει τους μαθητές για να απευθυνθεί σε όλους μαζί, είτε για κάποια διευκρίνιση, είτε για να συζητηθεί κάτι ενώπιον όλης της τάξης. **Η διακοπή της εργασίας των μαθητών, όταν αυτοί εργάζονται σε ομάδες, καλό είναι να γίνεται με το χτύπημα του κουδουνιού.** Αυτό είναι κάτι που δεν αναφέρεται στη βιβλιογραφία, απ' όσο γνωρίζουμε, όσοι εκπαιδευτικοί όμως έχουν την εμπειρία της διδασκαλίας σε ομάδες στο ελληνικό σχολείο, με ή χωρίς τις νέες τεχνολογίες, πιστεύουμε ότι θα μπορούσαν εύκολα να συνηγορήσουν με την παραπάνω ρήση. Η απουσία της βιβλιογραφικής αναφοράς σχετικά με το προαναφερθέν ίσως να οφείλεται στη διαφορετική συμπεριφορά των μαθητών και την κουλτούρα της διδασκαλίας στα σχολεία των άλλων χωρών ή στο γεγονός ότι οι ερευνητές δεν ασχολούνται με τέτοιου είδους πρακτικά ζητήματα.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, στο τέλος της διδακτικής ώρας και με το χτύπημα του κουδουνιού, κάθε ομάδα αποθήκευσε το αρχείο του λογισμικού που είχε κατασκευάσει, ο διδάσκων μάζεψε τα φύλλα εργασίας και την επόμενη ημέρα όπου η διδασκαλία επαναλήφθηκε στο εργαστήριο των υπολογιστών, τα μοίρασε εκ νέου στους μαθητές.

2^η διδακτική ώρα

Οι μαθητές κάθισαν σύμφωνα με τις ομάδες της προηγούμενης διδακτικής ώρας και άνοιξαν το αρχείο που είχαν αποθηκεύσει. Αφού συζήτησαν για 5 λεπτά περίπου σχετικά με το ορθικό τρίγωνο και τα ευρήματά τους, ο διδάσκων πρότεινε για την παρούσα διδακτική ώρα να τεθεί ο στόχος, με βάση τα ευρήματα των ομάδων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, να διατυπώσουν ένα θεώρημα, μια ιδιότητα του ορθικού τριγώνου που ανακάλυψαν, και να το αποδείξουν. Το θεώρημα αυτό θα μπορούσαν οι μαθητές να το δώσουν ως άσκηση σε συμμαθητές τους από άλλα τμήματα ή σε φίλους τους, για να δουν ποιοι θα καταφέρουν να το αποδείξουν. Συζητήθηκε ακόμη αν η διατύπωση θα περιλαμβάνει υποερωτήματα που να διευκολύνουν την εύρεση της απόδειξης ή να μη δίνονται οι περισσότερες ιδιότητες που θα αποτελούν ενδεχομένως τα ενδιάμεσα βήματα και έτσι η απόδειξη να είναι δύσκολη. Όλοι συμφώνησαν με τη δεύτερη επιλογή!

Όσον αφορά στη σειρά των ομάδων που θα παρουσιάσουν τα ευρήματά τους ενώπιον της ολομέλειας της τάξης, κάτι που αποτελεί απόφαση του διδάσκοντος, είναι προφανές ότι αν επιλεγόταν πρώτη μία από τις τρεις ομάδες που είχε ολοκληρώσει απόλυτα σωστά τη διερεύνηση και την αιτιολόγηση, θα γινόταν μεγάλη οικονομία διδακτικού χρόνου, θα χανόταν όμως η ευκαιρία την συζήτησης και της αντιπαράθεσης των ομάδων και της κατασκευής της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές.

Επιλέχθηκαν λοιπόν αρχικά ομάδες που δεν είχαν σωστή τη σειρά των αιτιολογήσεων και έγινε παρουσίαση των ευρημάτων τους στον βιντεοπροβολέα (δυστυχώς δε λειτουργούσε ο διαδραστικός του εργαστηρίου). Ακολούθησε συζήτηση, αντιπαράθεση επιχειρημάτων και διαπραγμάτευση μεταξύ των ομάδων, όπου η συμμετοχή και το ενδιαφέρον των μαθητών ήταν πολύ μεγάλο. Συζητήθηκαν όλα τα ευρήματα των ομάδων και οι αιτιολογήσεις που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα της παρούσας εργασίας.

Με τη λεπτή καθοδήγηση του διδάσκοντος διατυπώθηκε και η άσκηση όπως ακριβώς περιλαμβάνεται στο σχολικό βιβλίο, και έγινε η απόδειξη της στον πίνακα του εργαστηρίου. Όλοι οι μαθητές συμμετείχαν με ενθουσιασμό, σηκώνοντας συνεχώς το χέρι σε κάθε

ερώτηση του διδάσκοντα, ακόμα και αυτοί με τις χαμηλότερες επιδόσεις, και φαίνονταν να είναι εξοικειωμένοι με το σχήμα, τις ισότητες γωνιών και τα εγγράψιμα τετράπλευρα. Η ενασχόλησή τους με τη μέτρηση των γωνιών και ο προβληματισμός τους σχετικά με τα εγγράψιμα τετράπλευρα που είχε λάβει χώρα την πρώτη διδακτική ώρα, κατά την εργασία τους σε ομάδες, έκανε την απόδειξη πιο βατή και τις ιδιότητες του σχήματος και τα σχετικά θεωρήματα πιο οικεία.

Συμπεράσματα

Σε ένα παραδοσιακό μάθημα Γεωμετρίας, οι μαθητές, ως παθητικοί ακροατές, μαθαίνουν ορισμούς και θεωρήματα, προβλήματα και αποδείξεις, δίχως να αποκτούν την εμπειρία της ανακάλυψης των γεωμετρικών ιδιοτήτων. Τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας είναι ακριβώς κατάλληλα για να οδηγήσουν τον μαθητή σε εξερεύνηση και ανακάλυψη, είτε καθοδηγούμενα είτε τελείως ανοικτά (Schwartz & Yerushalmy, 1987)

Αν γινόταν η διαπραγμάτευση της άσκησης στην αίθουσα διδασκαλίας, οι μαθητές με τις χαμηλές επιδόσεις, κατά κανόνα, δε θα συμμετείχαν και θα ήταν απόλυτα παθητικοί, παρά τις καλύτερες προθέσεις και την όποια ικανότητα και ενδιαφέρον προς αυτούς που θα μπορούσε να επιδείξει ο διδάσκων.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση όμως, όλοι οι μαθητές, ακόμη και αυτοί με χαμηλές ή μέτριες επιδόσεις στα μαθηματικά, ενεργοποιήθηκαν, μέτρησαν γωνίες, ανακάλυψαν ισότητες γωνιών και εγγράψιμα τετράπλευρα, διατύπωσαν εικασίες και συζήτησαν με τους συμμαθητές τους στα πλαίσια της ομάδας τους. Η διερεύνηση με τη βοήθεια του λογισμικού, που προηγήθηκε της απόδειξης που έλαβε χώρα τη δεύτερη διδακτική ώρα, έκανε πιο οικείες τις ιδιότητες του σχήματος για τους μαθητές, τους μετέτρεψε σε ερευνητές και προκάλεσε τη συλλογική διαπραγμάτευση των γεωμετρικών εννοιών που εμπλέκονται. Η όλη ενασχόλησή τους, οι παρατηρήσεις τους και η συζήτηση με τους συμμαθητές τους στα πλαίσια της ομάδας τους, τους διευκόλυναν να κατανοήσουν τα στάδια της απόδειξης.

Κατά συνέπεια, τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, εκτός από τη δυνατότητα που δίνουν στους μαθητές να πειραματιστούν και να ανακαλύψουν γεωμετρικές ιδιότητες, αντί αυτές να τους δίνονται έτοιμες από την εκφώνηση της άσκησης, με την ενασχόληση με το σχήμα, τη διερεύνηση και την συζήτηση μεταξύ των ομάδων που προηγείται, μαζί με την κατάλληλη καθοδήγηση από το διδάσκοντα, μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές σημαντικά και στην εύρεση και κατανόηση της απόδειξης των ιδιοτήτων που έχουν ανακαλύψει.

Υπάρχει βέβαια το θέμα της αναγκαιότητας της απόδειξης. Όταν ο μαθητής μπορεί να ενεργοποιήσει τους μετρητές αποστάσεων ή γωνιών και με το σύρσιμο να παρατηρήσει ότι οι ιδιότητες μένουν αναλλοίωτες, τότε γιατί να χρειαστεί να αποδείξει κάτι; (Κυνηγός, 2011) Το ζήτημα αυτό δεν τέθηκε από τους μαθητές στο συγκεκριμένο μάθημα, μιας και είχε συζητηθεί σε προηγούμενες ανάλογες δραστηριότητες με το συγκεκριμένο τμήμα, συνεπώς δεν θα επεκταθούμε εδώ, για λόγους οικονομίας χώρου.

Προτάσεις - Επεκτάσεις

Με περαιτέρω χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας και με τρόπο παρόμοιο μπορεί να γίνει διερεύνηση και ανακάλυψη και άλλων ιδιοτήτων του ορθικού τριγώνου από τους

μαθητές και στη συνέχεια η απόδειξή τους. Ιδιότητες του ορθικού τριγώνου μπορούν εύκολα να αναζητηθούν στο διαδίκτυο, π.χ. 21 ιδιότητες μπορούν να βρεθούν στο σύνδεσμο

<http://catalysis.gr/mathematics/geometry/planar/triangle/orthic.html>

αρκετές από τις οποίες μπορούν να διδαχθούν στην Α΄ λυκείου με τη σημερινή διαμόρφωση της ύλης, π.χ. με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να σχεδιάσουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του αρχικού τριγώνου και οι μαθητές μετά από διερεύνηση να ανακαλύψουν ότι οι ακτίνες του ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ είναι κάθετες στις πλευρές του ορθικού τριγώνου.

Μια ακόμα επέκταση είναι το θεώρημα του Fagnano, ότι δηλαδή το ορθικό τρίγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο από όλα τα τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα στο αρχικό τρίγωνο. Μια πολύ ενδιαφέρουσα διδακτική πρόταση σχετικά με το θεώρημα αυτό, με τη βοήθεια του λογισμικού Sketchpad στο Πλατάρος & Παπαδοπούλου (2009).

Η παρούσα διδακτική πρόταση μπορεί ακόμα να αποτελέσει παράδειγμα για το πώς μπορεί να μετατραπεί μια άσκηση του σχολικού ή οποιοδήποτε άλλου βιβλίου στα πλαίσια της διδακτέας ύλης να διδαχθεί με χρήση των νέων τεχνολογιών. Το φύλλο εργασίας μπορεί να έχει παρόμοια δομή. Αρχικά να δίνονται οι υποθέσεις της άσκησης-θεωρήματος και να ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν το σχήμα με το λογισμικό, να μετρήσουν πλευρές, γωνίες, εμβαδά ή ότι άλλο χρειάζεται, να διαπιστώσουν ιδιότητες και εικασίες και τέλος να τις αποδείξουν, στα πλαίσια του αξιωματικού συστήματος της ευκλείδειας γεωμετρίας. Αποτελεί τρόπο εισαγωγής των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία της ευκλείδειας γεωμετρίας, η οποία λόγω των μικρών απαιτήσεων σε διδακτικές ώρες μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα στην καθημερινή σχολική πρακτική.

Αναφορές

- diSessa, A., Hoyles, C., & Noss, R. (Eds.) (1995). *Computers and Exploratory Learning*. Berlin: Springer-Verlag.
- Von Glaserfeld (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Schwartz, J. L., & Yerushalmy, M. (1987). The Geometric Supposer: A case study in the use of Microcomputers in Mathematics Education. In Bishop, J., Lochhead, J. & Perkins, D. N. *Thinking*. Erlbaum, Hillsdale, NJ.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.
- Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ. & Σίδερης, Π. (2009/1999). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.
- Ζαγούρας, Χ. (Επιμ.) (2013). *Επιμορφωτικό υλικό για την Επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης*. Τεύχος 1: Γενικό Μέρος (3^η εκ.). Πάτρα: ΙΤΥ
- Κυνηγός, Χ. (Επιμ.) (2010). *Επιμορφωτικό υλικό για την Επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης*. Τεύχος 4, Κλάδος ΠΕ03 (2^η έκ.). Πάτρα: ΙΤΥ
- Κυνηγός, Χ. (2011). *Το Μάθημα της Διερεύνησης, Παιδαγωγική Αξιοποίηση των Ψηφιακών Τεχνολογιών για τη Διδακτική των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Τόπος, Αθήνα.
- Πλατάρος, Γ., & Παπαδοπούλου, Α. (2009). Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση μέσω των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών. *1ο Εκπαιδευτικό Συνέδριο «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία*. Βόλος.