

Εξερευνώντας γεωμετρικές έννοιες με μαθητές Γ΄ Γυμνασίου χρησιμοποιώντας το λογισμικό Geogebra σε αντιδιαστολή με το χαρτί και το μολύβι

Αικατερίνη Ρουμπή

katerina.maroussi@gmail.com

Μαθηματικός ΠΕ3, 1^ο Γυμνάσιο Αμαρουσίου

Περίληψη. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται τα ευρήματα της έρευνας που εκπονήθηκε στα πλαίσια της επιμόρφωσης β-επιπέδου, 4^{ης} περιόδου Μαΐου-Νοεμβρίου 2013. Ένα τρίωρο σενάριο με κατάλληλα φύλλα εργασίας εφαρμόστηκε σε ένα τμήμα της Γ΄ Γυμνασίου στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου και σε ένα άλλο τμήμα της Γ΄ Γυμνασίου στην τάξη με χαρτί και μολύβι. Η έρευνα δείχνει πως η διαδικασία μάθησης στα δύο προαναφερθέντα περιβάλλοντα μάθησης είναι διαφορετική. Τα εργαλεία ενός λογισμικού μπορούν να διαμεσολαβήσουν τις έννοιες και να διευκολύνουν τη νοητή δημιουργία τους καθώς και την αναγνώριση σχέσεων και κανονικότητων. Στο παραδοσιακό μοντέλο χαρτί- μολύβι η νοητική ικανότητα του μαθητή είναι ο βασικός παράγοντας που οδηγεί στη μάθηση. Η παρούσα μελέτη επιβεβαιώνει την έρευνα.

Λέξεις κλειδιά: περιβάλλον μάθησης, λογισμικό, δραστηριότητα

Εισαγωγή

Από το 2010 έως σήμερα στην Ελλάδα γίνεται μια μεγάλη προσπάθεια αλλαγής της στάσης και της συμπεριφοράς απέναντι στα Μαθηματικά και στη Μαθηματική Εκπαίδευση στα σχολεία όλων των βαθμίδων. Αυτή η προσπάθεια συνίσταται καταρχήν στον εμπλουτισμό των σχολικών βιβλίων με τη βοήθεια μικροπειραμάτων και κατά δεύτερον στη συστηματική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, γνωστή ως επιμόρφωση β-επιπέδου.

Τα διαδραστικά σχολικά βιβλία των Μαθηματικών (από την 3^η Δημοτικού έως και τη β΄ Λυκείου) υπάρχουν στο διαδίκτυο στην ψηφιακή τους μορφή και είναι εμπλουτισμένα με 830 μικροπειράματα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέγει όποια από αυτά ταιριάζουν στη διδασκαλία του και στην τάξη του και είτε να τα παρουσιάζει αυτούσια στους μαθητές, με τη βοήθεια διαδραστικού πίνακα ή προτζέκτορα, είτε στην καλύτερη περίπτωση να εμπλέκει τους μαθητές στις δραστηριότητες του μικροπειράματος και με κατάλληλο φύλλο εργασίας να τους δίνει την ευκαιρία του πειραματισμού και της ανακάλυψης. Κάθε ένα από τα 830 μικροπειράματα περιέχει οδηγίες και δραστηριότητες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα αλλά υπάρχει και η δυνατότητα επέμβασης στο αρχείο λογισμικού και μετατροπής του ανάλογα με τις ανάγκες της εκάστοτε διδασκαλίας.

Η επιμόρφωση β-επιπέδου των εκπαιδευτικών στόχους έχει την εξοικείωση των εκπαιδευτικών με τα διάφορα διαθέσιμα λογισμικά, με την έννοια της δραστηριότητας και του φύλλου εργασίας αλλά κυρίως την αλλαγή στάσης των εκπαιδευτικών απέναντι στη διδασκαλία των Μαθηματικών ώστε από το μοντέλο πίνακας-κιμωλία να περάσει ομαλά και επιτυχώς σε ένα μοντέλο πειραματισμού και διερευνητικής συμμετοχής των μαθητών

(Κυνηγός κ.ά., 2008). Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο η γνώση δεν «παρουσιάζεται» στο μαθητή αλλά μέσα από δοκιμή και λάθος και από διαπραγμάτευση σε ομάδες «ανακαλύπτεται». Η διαδικασία αυτή δεν είναι αυτόματη. Περνά μέσα από διατύπωση εικασίας, έλεγχο, αναδιατύπωση αν χρειαστεί και τέλος μαθηματική εξήγηση (αν μιλάμε για μαθητές γυμνασίου) ή μαθηματική απόδειξη (αν μιλάμε για μαθητές λυκείου).

Θεωρητικό πλαίσιο

Η τεχνολογία έχει εισβάλει καθοριστικά και καταλυτικά στη ζωή μας. Και στην εκπαίδευση μας αναγκάζει να επαναπροσδιορίσουμε τι σημαίνει γνώση και πώς επιτυγχάνεται (Karut, 1998). Η τεχνολογία ανοίγει ένα καινούριο παράθυρο στη δόμηση νοήματος, παρέχει εργαλεία δημιουργίας και ανακάλυψης και μπορεί να κάνει τα Μαθηματικά πιο προσιτά στους μαθητές (Noss & Hoyles, 1996). Η έρευνα (Arzarello et al., 2002) έχει δείξει ότι η τεχνολογία από μόνη της δεν προκαλεί εκπαιδευτική αλλαγή, το λογισμικό από μόνο του δεν παρέχει τη μετάβαση. Αν, όμως, τα εργαλεία του λογισμικού έχουν γίνει σαφή και έχουν εισαχθεί στη σχολική κουλτούρα τότε είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί το λογισμικό με παραγωγικό τρόπο. Συγκεκριμένα στην περιοχή της γεωμετρίας τα σύγχρονα γεωμετρικά λογισμικά δημιουργούν δυναμικούς διασυνδεδεμένους μικρόκοσμους μέσα στους οποίους πραγματοποιούνται κατασκευές, διερευνήσεις που θα ήταν εξ ορισμού δύσκολες στα πλαίσια των συμβατικών εργαλείων της διδακτικής αίθουσας (Κεΐσογλου, 2006). Ο ρόλος του εκπαιδευτικού εξακολουθεί να είναι καθοριστικός καθώς και ο ρόλος της δραστηριότητας και του σωστά δομημένου φύλλου εργασίας.

Οι Laborde et al. (2006) διακρίνουν τέσσερα είδη δραστηριοτήτων :

- Δραστηριότητες στις οποίες το περιβάλλον διευκολύνει τις υλικές ενέργειες αλλά δεν αλλάζει τη δραστηριότητα για τους μαθητές, πχ παράγοντας σχήματα και μετρώντας τα στοιχεία τους.
- Δραστηριότητες στις οποίες το περιβάλλον διευκολύνει την εξερεύνηση και ανάλυση των μαθητών πχ προσδιορίζοντας σχέσεις μέσα σε ένα σχήμα μέσω του συρσίματος.
- Δραστηριότητες οι οποίες μπορούν να γίνουν με χαρτί και μολύβι, αλλά μπορούν να επιλυθούν διαφορετικά σε ένα DGS (Dynamic Geometry Systems) λογισμικό, πχ μια κατασκευαστική δραστηριότητα μπορεί να λυθεί στο DGS χρησιμοποιώντας ένα γεωμετρικό μετασχηματισμό ή το άθροισμα διανυσμάτων.
- Δραστηριότητες που δεν μπορούν να τεθούν χωρίς τη μεσολάβηση του DGE , πχ ανακατασκευάζοντας ένα δυναμικό διάγραμμα μέσω πειραματισμού με αυτό, ώστε να προσδιορισθούν οι ιδιότητές του.

Ο δεύτερος τύπος δραστηριότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ερευνητικό εργαλείο για διερεύνηση των ιδεών των μαθητών. Δρα ως παράθυρο στις αντιλήψεις και κατανοήσεις των μαθητών, όπως φαίνεται στην έρευνα των Arzarello et al. (2002).

Περιγραφή σεναρίου

Στα πλαίσια της επιμόρφωσης β-επιπέδου εκπονήθηκε το τρίωρο σενάριο που παρουσιάζεται σε αυτό το άρθρο. Οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν ανήκουν στη δεύτερη από τις κατηγορίες που αναφέρθηκαν παραπάνω, δηλαδή είναι δραστηριότητες που το ψηφιακό περιβάλλον δίνει μεγαλύτερη ευχέρεια για πειραματισμό και διερεύνηση.

Οι δραστηριότητες του σεναρίου εφαρμόστηκαν σε ένα τμήμα της Γ' Γυμνασίου του 1^{ου} Γυμνασίου Αμαρουσίου στο εργαστήριο των υπολογιστών του σχολείου με τη βοήθεια του λογισμικού *geogebra* και στη συνέχεια εφαρμόστηκαν σε ένα άλλο τμήμα της Γ' Γυμνασίου στη σχολική τάξη με μολύβι και χαρτί. Το βασικό ερώτημα ήταν αν υπάρχουν και ποιες είναι οι διαφορές ανάμεσα στα δύο περιβάλλοντα μάθησης. Συγκεκριμένα αν ο δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων που παρέχει το λογισμικό *geogebra* επιτρέπει στους μαθητές :

- α) να εκφράζουν μέσω αυτού μαθηματικές ιδέες και νοήματα και
- β) να αναπτύσσουν εικασίες και υποθέσεις μέσω της διερεύνησης και του πειραματισμού ψηφιακών φαινομένων.

Η έρευνα (Arzarello et al., 2002) δείχνει πως στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι η νοητική ικανότητα του μαθητή προχωρά τη γνωστική διαδικασία, ενώ στο περιβάλλον του λογισμικού τα εργαλεία του μπορούν να τη διαμεσολαβήσουν. Σύμφωνα με την ίδια έρευνα το σύρσιμο (*dragging*) είναι ένα τέτοιο εργαλείο και δίνει τη δυνατότητα για διαφορετικούς τύπους συρσίματος, τους οποίους χρησιμοποιούν οι μαθητές σύμφωνα με τους διαφορετικούς τους σκοπούς κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων.

Ακολουθούν τύποι συρσίματος:

- *Wandering dragging* (σύρσιμο περιπλάνησης): Μετακινώντας με τυχαίο τρόπο τα βασικά σημεία πάνω στην οθόνη, χωρίς κάποιο πλάνο.
- *Bound dragging* (κατευθυνόμενο σύρσιμο): Μετακινώντας ένα σημείο ήδη συνδεδεμένο με ένα αντικείμενο.
- *Guided dragging* (καθοδηγούμενο σύρσιμο): Σύροντας τα βασικά σημεία του σχήματος, ώστε να του δώσουν ένα συγκεκριμένο σχήμα.
- *Dummy locus dragging* (σύρσιμο κρυφού ή τεχνητού (γεωμετρικού) τόπου): Μετακινώντας ένα βασικό σημείο ώστε το σχήμα να διατηρεί μια ιδιότητα που έχει ανακαλυφθεί. Το σημείο που μετακινείται ακολουθεί ένα μονοπάτι, ακόμα και αν οι χρήστες δεν το συνειδητοποιούν: ο τόπος δεν είναι ορατός και δεν 'μιλάει' στους μαθητές, που δεν συνειδητοποιούν ότι σύρουν κατά μήκος ενός τόπου.
- *Line dragging* (σύρσιμο γραμμής): Σχεδιάζοντας νέα σημεία κατά μήκος μιας γραμμής ώστε να διατηρήσουν την κανονικότητα του σχήματος.
- *Linked dragging* (συνδεδεμένο σύρσιμο): Συνδέοντας ένα σημείο με ένα αντικείμενο και μετακινώντας το πάνω σε αυτό το αντικείμενο.
- *Dragging test*: Μετακινώντας σημεία, ώστε να δουν αν το σχέδιο διατηρεί τις αρχικές του ιδιότητες.

Στο παρόν σενάριο παρατηρήθηκε πως οι μαθητές αξιοποιούν αυτές τις διαφορετικές μορφές συρσίματος, ώστε να επιτύχουν διαφορετικούς στόχους, όπως το να εξερευνήσουν, να εικάσουν, να επικυρώσουν, να αιτιολογήσουν.

Και στις δύο εφαρμογές χρησιμοποιήθηκε ομαδοσυνεργατική μέθοδος (Ζωγόπουλος, 2013).

Στο εργαστήριο κάθε ομάδα αποτελούνταν από δύο ή τρεις μαθητές και της αντιστοιχούσε ένας υπολογιστής. Όλα τα μέλη της ομάδας έπρεπε να πειραματιστούν με το ποντίκι και κάθε 5 λεπτά να εναλλάσσονται στη χρήση του. Ένας μαθητής κάθε ομάδας ήταν

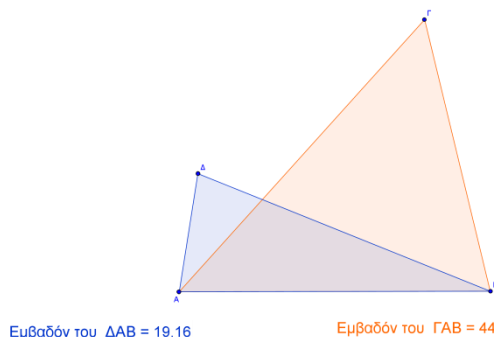
υπεύθυνος για τη συμπλήρωση στο φύλλο εργασίας των σκέψεων, εικασιών, σχημάτων και αποδείξεων που προέκυπταν.

Στην τάξη δημιουργήθηκαν τετραμελείς ομάδες και σε κάθε μαθητή δόθηκε φύλλο εργασίας ώστε όλοι να έχουν την ευκαιρία να σχεδιάσουν και να προσεγγίσουν τις δραστηριότητες. Όμως τους ζητήθηκε στο τέλος να παραδώσουν ένα φύλλο εργασίας ανά ομάδα και να ορίσουν έναν γραμματέα που θα το συμπλήρωνε μετά από τη σύμφωνη γνώμη όλων των μελών της ομάδας.

Οι οδηγίες που δόθηκαν και στα δύο περιβάλλοντα ήταν οι ίδιες. Αρχικά να μελετούν για δύο λεπτά ο καθένας μόνος του τη δραστηριότητα και μετά μέσα από συζήτηση και διαπραγμάτευση να ξεκινούν την κατασκευή που ζητά. Να μην απορρίπτουν αλλά ούτε να αποδέχονται καμία ιδέα παρά μόνο αν έχουν πειστεί από τον συμμαθητή τους. Έτσι να αναγκάζονται να εξηγούν τις ιδέες τους και με αυτόν τον τρόπο να κατακτούν καλύτερη κατανόηση των εννοιών. Όταν χρειάζεται να εξηγήσουμε τις ιδέες μας τότε ξεκαθαρίζουν μέσα μας και «συνειδητοποιούμε τι ξέρουμε» (μεταγνώση) (Καρα, 2001). Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να προσπαθούν να διατυπώνουν εικασίες και μετά να τις ελέγχουν για την ορθότητά τους. Αν η εικασία ήταν λανθασμένη να επαναδιατυπώνουν και να την ξαναελέγχουν όσες φορές χρειαστεί έως ότου καταλήξουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Με τον τρόπο αυτό γίνεται μια απλή προσομοίωση της επιστημονικής ανακαλυπτικής διαδικασίας. Στο τέλος κάθε φύλλου εργασίας υπήρχε πάντα απαίτηση μαθηματικής αιτιολόγησης ώστε να βεβαιώνονται όλοι για την ορθότητα της λύσης αλλά και για να τονίζεται η αναγκαιότητα της απόδειξης στα μαθηματικά. Σημειώνεται ότι οι μαθητές ήταν εξοικειωμένοι με τον ομαδοσυνεργατικό τρόπο εργασίας καθώς και με τη διαδικασία διατύπωσης εικασίας και ελέγχου διότι χρησιμοποιούνται συστηματικά στην καθημερινή διδασκαλία τους.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού και στα δύο περιβάλλοντα ήταν ίδιος. Να εμπυχώνει και να ενθαρρύνει τους μαθητές να συνεχίσουν τη διερεύνησή τους. Περνούσε συνεχώς από τη μία ομάδα στην άλλη κυκλικά. Απέφευγε να δίνει απαντήσεις του τύπου «σωστό», «λάθος» αλλά επαναδιατύπωνε και με κατάλληλες κάθε φορά ερωτήσεις προσπαθούσε να στρέψει τους μαθητές στη μεταξύ τους συζήτηση και διαπραγμάτευση. Επίσης υπενθύμιζε τα εργαλεία του λογισμικού μέσα από τα οποία μπορούσαν να βρουν τις απαντήσεις που έψαχναν.

1^η Διδακτική ώρα στο εργαστήριο Η/Υ με *geogebra*



Σχήμα 1. 1^η δραστηριότητα 1^{ης} διδακτικής ώρας σεναρίου στο εργαστήριο Η/Υ

Σε αυτή την πρώτη ώρα οι μαθητές κλήθηκαν να μελετήσουν μία απλή αλλά βασική ιδέα της γεωμετρίας : ότι ανάμεσα σε δύο παράλληλες ευθείες μπορούν να κατασκευαστούν

ισεμβαδικά τρίγωνα όταν έχουν κοινή βάση πάνω σε μία από τις δύο παράλληλες και την τρίτη κορυφή να κινείται ελεύθερα πάνω στην άλλη παράλληλη.

Στο σχήμα που δόθηκε στο εργαστήρι Η/Υ (σχήμα 1) το κίτρινο τρίγωνο ΑΒΓ ήταν σταθερό ενώ το μπλε τρίγωνο ΑΒΔ είχε σταθερή βάση και η κορυφή Δ μπορούσε να κινείται προς όλες τις κατευθύνσεις. Αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές να προσεγγίσουν το ερώτημα διαισθητικά, να εικάσουν και η ερώτηση που ακολούθησε ήταν «πόσο σίγουρος είσαι;» και στην απάντηση πχ «είμαι 80% σίγουρος» ακολουθούσε «τι μπορείς να κάνεις για να γίνεις 100% σίγουρος;». Οι μαθητές ξεκίνησαν μετακινώντας με τυχαίο τρόπο το σημείο Δ πάνω στην οθόνη(wandering dragging, Arzarello et al., 2002), χωρίς κάποιο πλάνο, ώστε να παρατηρούν τις αλλαγές στα εμβαδά των σχημάτων που δίνονταν στο κάτω μέρος της οθόνης .

Στη συνέχεια οι μαθητές διερεύνησαν πόσα τελικά τρίγωνα υπάρχουν με τις ζητούμενες ιδιότητες , δηλαδή με ίδια βάση και ίδιο εμβαδόν. Τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν ένα τρίγωνο με τις δύο ιδιότητες μετά ένα άλλο , μετά όσα περισσότερα μπορούν και στο τέλος να απαντήσουν στην ερώτηση πόσα τελικά τέτοια τρίγωνα υπάρχουν. Το είδος του συρσίματος αυτή τη φορά ήταν α) το καθοδηγούμενο σύρσιμο (guided dragging) σύροντας τα βασικά σημεία του σχήματος, ώστε να του δώσουν το συγκεκριμένο σχήμα που ήθελαν και β) το σύρσιμο γραμμής(*Line dragging*) σχεδιάζοντας νέα σημεία κατά μήκος μιας γραμμής ώστε να διατηρήσουν την κανονικότητα του σχήματος δηλαδή το εμβαδόν του τριγώνου σταθερό.

Σε όλες τις ομάδες υπήρχε κάποιος που «έβλεπε» πως είναι άπειρα αλλά πάλι σε όλες τις ομάδες υπήρχαν και «δύσπιστοι» μαθητές οπότε γόνιμες συζητήσεις έλαβαν χώρα. Στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν ο ένας στον άλλο προχωρούσαν σε βάθος στην κατανόηση των γεωμετρικών αντικειμένων της δραστηριότητας καθώς και των σχέσεών τους. Το εργαλείο του λογισμικού που χρησιμοποιήθηκε ήταν το συνδεδεμένο σύρσιμο (linked dragging) συνδέοντας την ελεύθερη κορυφή με τη μία παράλληλη και μετακινώντας την πάνω σε αυτήν. Με αυτόν τον τρόπο έκαναν επιβεβαίωση πως σε κάθε μετακίνηση της τρίτης κορυφής το εμβαδόν του τριγώνου έμενε αμετάβλητο.

Η αξιοσημείωτη ιδιότητα της ελεύθερης κορυφής ειπώθηκε με ενδιαφέροντες τρόπους. Η πιο δημοφιλής απάντηση ήταν « οι κορυφές είναι όλες στο ίδιο ύψος». Η επόμενη πιο δημοφιλής ήταν « όλες οι κορυφές περνούν από την ίδια ευθεία». Δύο ομάδες έγραψαν «όλες οι κορυφές απέχουν ίσα από τη βάση» και τα ύψη όλων των τριγώνων είναι ίσα». Μια ομάδα υποψιάστηκε πως η ζητούμενη ιδιότητα της ελεύθερης κορυφής είναι πως «βλέπει» την κοινή βάση με ίση γωνία. Όταν τους ζητήθηκε να μετρήσουν αυτές τις γωνίες με το αντίστοιχο εργαλείο του geogebra κατερρίφθη η υποψία τους.

Τέλος οι μαθητές έπρεπε να διατυπώσουν ένα μαθηματικό συμπέρασμα. Η διατύπωση είναι πάντα μία δύσκολη διαδικασία για τους μαθητές. Μία ομάδα δεν έγραψε κανένα συμπέρασμα και χρειάστηκαν ενθάρρυνση και καθοδήγηση. Οι υπόλοιπες έδωσαν ικανοποιητικές απαντήσεις. Συχνά οι διατυπώσεις παρουσιάζουν συντακτικά λάθη και ενώ αναμένεται το συμπέρασμα να έχει μορφή υποθετικού λόγου (αν υπόθεση τότε συμπέρασμα) τα παιδιά γράφουν μόνο το συμπέρασμα και δε θεωρούν απαραίτητο να σημειώσουν τα δεδομένα πάνω στα οποία πατήσανε για να εξάγουν το συμπέρασμα.

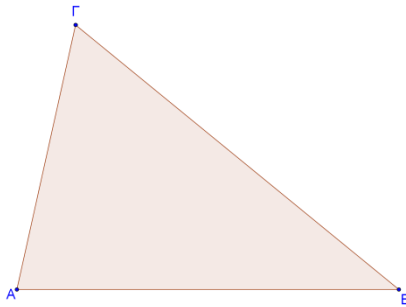
Αξίζει να σημειωθεί πως μία ομάδα στο συμπέρασμα έγραψε ότι υπάρχουν δύο παράλληλες ευθείες πάνω στις οποίες μπορεί να βρίσκεται η ελεύθερη κορυφή. Έτσι

δόθηκε η ευκαιρία να συζητηθεί στην ολομέλεια και η έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα.

Η τελευταία δραστηριότητα της πρώτης διδακτικής ώρας αφορούσε στη σχέση εμβαδού και περιμέτρου όλων αυτών των άπειρων τριγώνων. Ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν πώς μεταβάλλεται η περίμετρος αυτών των τριγώνων που βρίσκονται ανάμεσα στις δύο παράλληλες τη στιγμή που, όπως ήδη έχουν διατυπώσει, το εμβαδόν τους παραμένει σταθερό. Επάνω στην οθόνη υπήρχε ήδη εικονίδιο που μετρούσε και έδειχνε τη μεταβολή της περιμέτρου. Οι μαθητές απλώς κινώντας την τρίτη, ελεύθερη κορυφή έβλεπαν τις μεταβολές της περιμέτρου και εντυπωσιάστηκαν από το γεγονός ότι η περίμετρος συνεχώς μεγάλωνε και δυνητικά έφτανε στο άπειρο ενώ το εμβαδόν ήταν πάντα σταθερό. Η εξοικείωση με το άπειρο είναι βασική μαθηματική δεξιότητα και πάντα χρήσιμο να δίνονται ευκαιρίες για συζήτηση πάνω σε αυτό.

1^η Διδακτική ώρα στην παραδοσιακή τάξη με χαρτί και μολύβι

Στο φύλλο εργασίας που δόθηκε στην τάξη υπήρχαν οι ίδιες δραστηριότητες αλλά στο σχήμα (σχήμα 2) υπήρχε μόνο ένα τρίγωνο ΑΒΓ σταθερό.



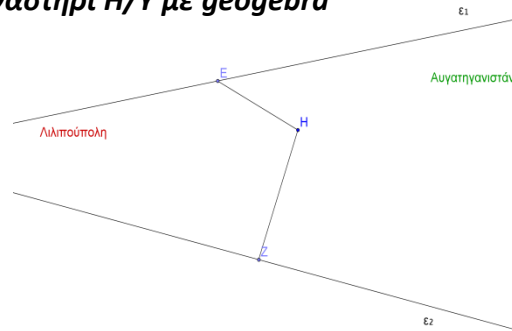
Σχήμα 2. 1^η δραστηριότητα 1^{ης} διδακτικής ώρας σεναρίου στην τάξη

Στο χαρτί δεν υπάρχει η δυνατότητα δυναμικού σχήματος και έτσι οι μαθητές ξεκίνησαν τη διερεύνησή τους με μετρήσεις μηκών και υπολογισμούς εμβαδών με τον τύπο. Με βάση τις μετρήσεις σχεδίασαν τρία ή τέσσερα το πολύ τρίγωνα. Αυτή ήταν μία από τις διαφορές στα δύο περιβάλλοντα μάθησης: σε όλες τις δραστηριότητες τα σχήματα που σχεδίαζαν στο χαρτί ήταν πάντα πολύ λιγότερα από αυτά που σχεδίαζαν στο geogebra. Τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξαν οι μαθητές ήταν τα ίδια: ύπαρξη άπειρων τριγώνων με την επιθυμητή ιδιότητα, καθορισμός παράλληλης ευθείας πάνω στην οποία κείται η τρίτη κορυφή αυτών των τριγώνων, η έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα και η μεταβολή της περιμέτρου. Η διατύπωση αποτέλεσε και πάλι μία απαιτητική διαδικασία με αρκετή συζήτηση στην ολομέλεια.

Σε όλη τη διάρκεια της πρώτης διδακτικής ώρας στην τάξη οι μαθητές καταπιάστηκαν με μετρήσεις και κατασκευές με χαρτί και μολύβι που προσπαθούσαν να είναι ακριβείς και καλοσχεδιασμένες. Η διαδικασία είχε σίγουρα θετικό ισοζύγιο στην κατανόηση και έτσι «είδαν» τα άπειρα τρίγωνα παρόλο που δε σχεδίασαν περισσότερα από τρία ή τέσσερα κάθε φορά. Στα σχόλιά τους ανέφεραν «όταν μεγαλώνει το ύψος» και «η κορυφή Γ κινείται πάνω σε παράλληλη ευθεία» έχοντας, όμως, στατικά σχήματα. Επίσης όσες φορές χρειάστηκε να μετρήσουν μήκη για να υπολογίσουν εμβαδά πήρε πολλή ώρα και πάντα έπρεπε να αποφασίζουν για την ακρίβεια των μετρήσεων. Σε κάθε ομάδα ένας από τους μαθητές ήταν επιφορτισμένος με αυτήν την εργασία, δηλαδή με τους αριθμητικούς

υπολογισμούς. Συγκριτικά με την εφαρμογή στο εργαστήρι θα λέγαμε πως χρειάστηκαν περισσότερο κόπο και χρόνο για να καταλήξουν στα ίδια συμπεράσματα.

2^η Διδακτική ώρα στο εργαστήρι Η/Υ με *geogebra*



Σχήμα 3. Δραστηριότητα 2^{ης} διδακτικής ώρας

Η δραστηριότητα της 2^{ης} διδακτικής ώρας ήταν κοινή και στα δύο περιβάλλοντα μάθησης.

Σε αυτή τη δεύτερη διδακτική ώρα του σεναρίου οι μαθητές κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν ένα πρόβλημα διαφορετικό από αυτά που συνήθως βρίσκουμε στο σχολικό βιβλίο. Έπρεπε να βρουν ένα δίκαιο τρόπο να μετακινήσουν τα σύνορα δύο χωρών (EH+HZ) ώστε το νέο σύνορο να είναι ευθύγραμμο τμήμα. (σχήμα 3)

Δύο είναι οι βασικές ιδέες: α) Να έρθουν αντιμέτωποι με κάτι εντελώς πρωτόγνωρο και να αναγκαστούν να χρησιμοποιήσουν τη φαντασία, και την αυτενέργειά τους, δηλαδή να εξασκηθούν στην επίλυση προβλήματος (problem solving) διότι στο σχολείο τις περισσότερες φορές εφαρμόζουν αλγορίθμους (βήματα) χωρίς πάντα να κατανοούν γιατί.

β) Να εφαρμόσουν το συμπέρασμα της 1^{ης} ώρας εφαρμογής του σεναρίου, δηλαδή τα ισεμβαδικά τρίγωνα ανάμεσα σε παράλληλες ευθείες.

Στο εργαστήρι Η/Υ οι μαθητές αφέθηκαν να πειραματιστούν χωρίς ιδιαίτερες οδηγίες για τη θέση του νέου συνόρου. Τους φάνηκε μάλλον δύσκολο να συνδυάσουν χώρες και τρίγωνα. Κάποιοι έκαναν μετρήσεις και κάποιοι άλλοι σχεδίαζαν με το χέρι ευθείες και τρίγωνα προσπαθώντας να πετύχουν ίσα εμβαδά. Στην πλειοψηφία τους δε χρησιμοποίησαν αμέσως τα εργαλεία του λογισμικού. Κάποιοι μάλιστα άργησαν να κατανοήσουν τι θα πει συντομία γραμμή και κατασκεύαζαν τρίγωνα μέσα σε μία από τις δύο χώρες, οπότε ίσως και να «προκαλούσαν πόλεμο» ανάμεσα στις δύο χώρες, αφού χωρίς να το καταλάβουν η μία από τις δύο χώρες θα έπαιρνε περισσότερα εδάφη! Στη συνέχεια δόθηκαν συγκεκριμένες οδηγίες κατασκευής παραλλήλων ώστε να οδηγηθούν στη χρησιμοποίηση του συμπεράσματος της προηγούμενης ώρας. Τα σχήματα που προέκυψαν είχαν ενδιαφέρον και μόνο λίγοι μαθητές συνέχισαν να προσπαθούν πρακτικά με μετρήσεις να επιτύχουν το ζητούμενο αποτέλεσμα χωρίς καμία μεθοδολογία, απλώς στην τύχη δοκιμάζοντας νέες θέσεις των συνόρων. Οι περισσότεροι μαθητές κατασκεύασαν παράλληλες σε διάφορες θέσεις ώστε να εφαρμόσουν το συμπέρασμα των ισεμβαδικών τριγώνων ανάμεσα σε παράλληλες ευθείες. Οι περισσότερες ομάδες κατασκεύασαν τις παράλληλες χρησιμοποιώντας το κατάλληλο εργαλείο του *geogebra* και όχι πρακτικά «με το μάτι». Έγιναν πολλές προσπάθειες και ακολουθούσαν πάντα από ζωηρές διαπραγματεύσεις ως προς την ορθότητά τους. Οι μορφές συρσίματος που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές ήταν το καθοδηγούμενο σύρσιμο και το σύρσιμο γραμμής στην αρχή, και αφού κατάφεραν να κατασκευάσουν την κατάλληλη παράλληλη

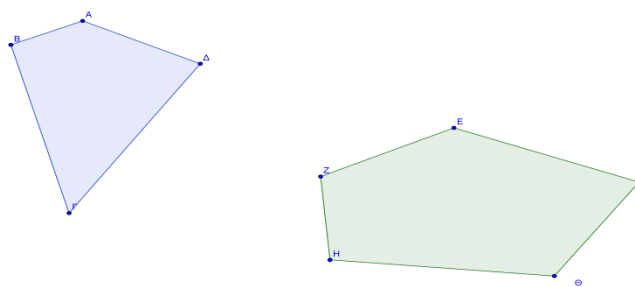
ευθεία, σύρσιμο κρυφού γεωμετρικού τόπου και σύρσιμο γραμμής για επιβεβαίωση των προβλέψεων. Οι μετρήσεις αποτέλεσαν χρήσιμο εργαλείο για έλεγχο των εικασιών αλλά πάντα στο τέλος η μαθηματική αιτιολόγηση ήταν απαραίτητη για να θεωρηθεί η λύση δεκτή. Μία από τις ομάδες πολύ γρήγορα έφτασε στην αναμενόμενη κατασκευή και εξήγηση σχετικά με τις δύο πιθανές θέσεις του νέου συνόρου. Ένας μαθητής από αυτή την ομάδα παρουσίασε στο τέλος της διδακτικής ώρας στην ολομέλεια τη λύση τους ώστε όλοι οι μαθητές να την έχουν στο φύλλο εργασίας τους. Σημειώνεται πως η ομάδα που έφτασε στη λύση δεν αποτελούνταν από αριστούχους μαθητές.

2^η Διδακτική ώρα στην παραδοσιακή τάξη με χαρτί και μολύβι

Στην εφαρμογή στην τάξη παρατηρήθηκαν τα ίδια νοητικά βήματα. Αρχικά οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να σκεφτούν «έξω από το κουτί» (think out of the box) αλλά τους άρεσε ο διαφορετικός τρόπος διατύπωσης της άσκησης. Σύντομα προχώρησαν σε μαθηματικές «κινήσεις» δηλαδή όπως έγραψαν στα φύλλα εργασίας : «Θα προεκτείνω...», «θα βρω το μέσον...», «θα δημιουργήσω ένα ευθύγραμμο τμήμα...», «θα μετακινήσω το σημείο Η...».

Αυτή η τελευταία παρατήρηση στο χαρτί αντιστοιχούσε σε πολλά σχήματα που πήραν αρκετό χρόνο και διορθώσεις για να σχεδιαστούν. Και πάλι μετά τη συγκεκριμένη οδηγία να χρησιμοποιήσουν το προηγούμενο συμπέρασμα η δουλειά προχώρησε πιο γρήγορα αφού έψαχναν για παράλληλες ευθείες. Με εξαίρεση τρεις μαθητές που παρακολουθούσαν περισσότερο παρά συμμετείχαν οι υπόλοιποι σχεδίαζαν και έσβηναν και ξανασχεδίαζαν με πάθος. Ακόμα και όταν έπρεπε να σβήσουν δεν τους πείραζε, ένοιωθαν πως δημιουργούσαν και δεν πήγαινε χαμένος ο κόπος τους. Μία από τις ομάδες έφτασε μέσα στα χρονικά πλαίσια της διδακτικής ώρας σε αποδεκτή λύση και την παρουσίασε στον πίνακα. Η ομάδα που έφτασε σε λύση αποτελούνταν, όπως όλες οι ομάδες, από μαθητές με διαφορετικές μαθηματικές αποδόσεις. Την ιδέα, όμως, την είχε η μαθήτρια με την υψηλότερη βαθμολογία και αυτή καθοδήγησε την ομάδα της στην κατασκευή και στην αιτιολόγηση.

3^η Διδακτική ώρα στο εργαστήρι Η/Υ με geogebra



Σχήμα 4. Δραστηριότητα 3^{ης} διδακτικής ώρας

Στην τρίτη και τελευταία ώρα του σεναρίου δόθηκε ένα τυχαίο τετράπλευρο για να μετατραπεί σε τρίγωνο με ίσο εμβαδόν (σχήμα 4). Ακολουθούσε τυχαίο πεντάγωνο με την ίδια δραστηριότητα ώστε στο τέλος της ώρας να γίνει αναφορά στον τριγωνισμό όλων των πολυγώνων. Θέμα ιδιαίτερος ενδιαφέρον με πολλές ιστορικές αναφορές που δίνει πάντα αφορμή για περαιτέρω εργασίες, τεχνικά ζητήματα, γεωδαισία, και σίγουρα συζήτηση για τον τετραγωνισμό του κύκλου.

Στο εργαστήρι Η/Υ μετά τις δύο προηγούμενες ώρες πειραματισμού με διαφορετικού ύφους ασκήσεις ήταν πιο εύκολο να δουλέψουν και δοκίμασαν διάφορες προσεγγίσεις. Όλοι έφεραν παράλληλες ευθείες προσπαθώντας να χρησιμοποιήσουν προηγούμενο συμπέρασμα. Δεν ήταν όλες οι επιλογές επιτυχημένες αλλά η συζήτηση που ακολουθούσε πάντα βοηθούσε στην κατανόηση. Χρησιμοποιούσαν τα εργαλεία του λογισμικού αυθόρμητα και η δραστηριότητα κύλησε πιο γρήγορα. Οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού ήταν απαραίτητες παρά μόνο σε ελάχιστες περιπτώσεις κι αυτές για να ακούσει τις ιδέες και τις προτάσεις τους. Δύο ομάδες αυτή τη φορά έφτασαν σε ολοκληρωμένη απάντηση. Παρουσιάστηκαν και οι δύο λύσεις, στην πραγματικότητα ήταν η ίδια ιδέα ξεκινώντας από διαφορετική κορυφή κάθε φορά.

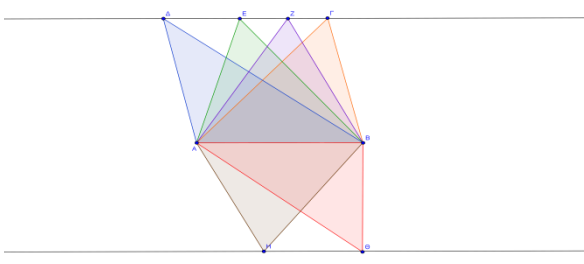
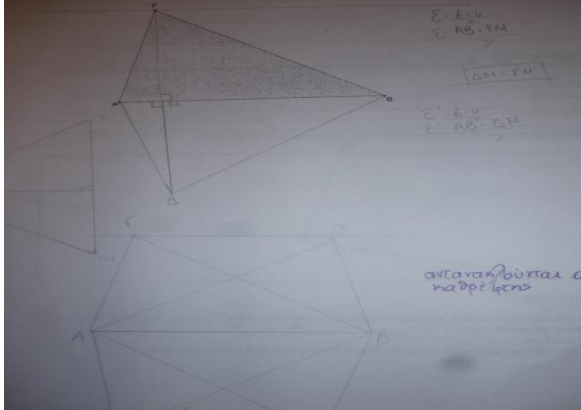
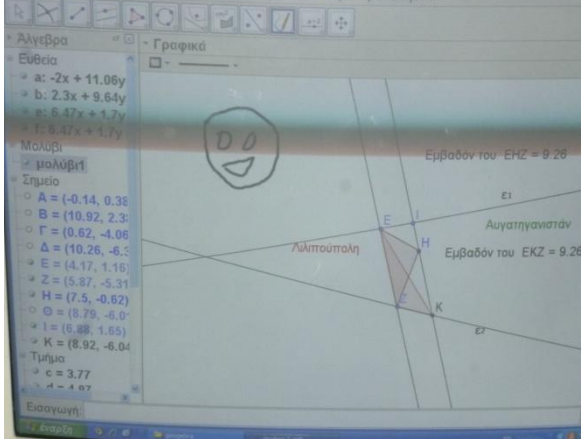
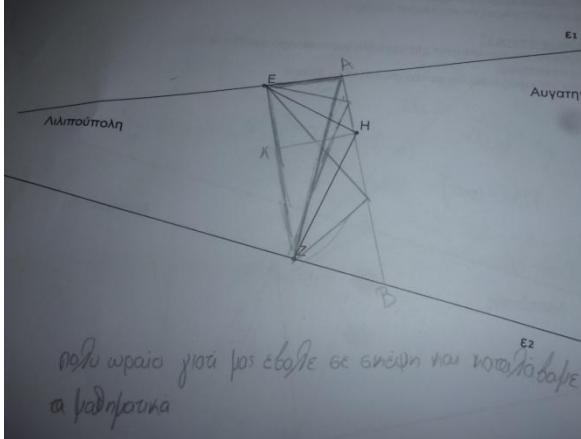
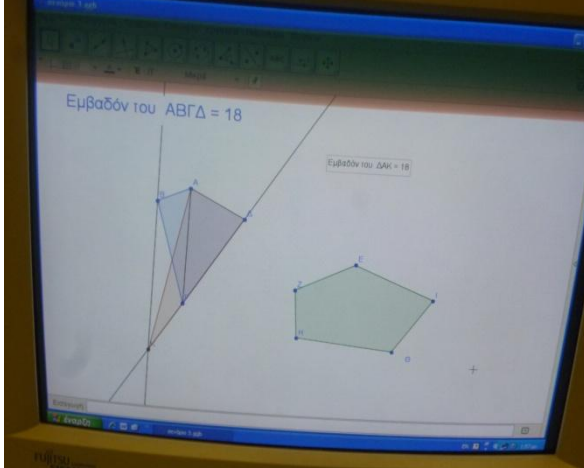
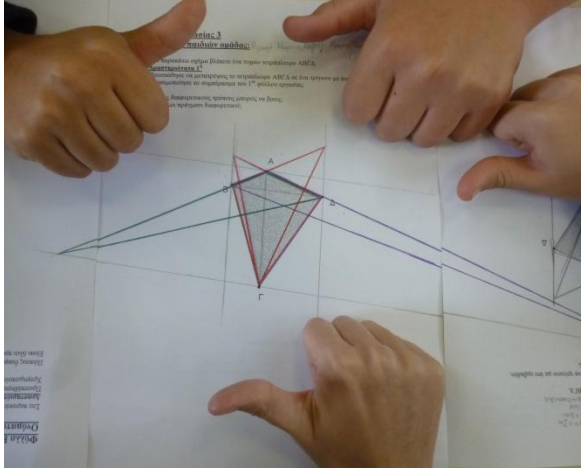
Γενικά στο περιβάλλον του εργαστηρίου Η/Υ οι περισσότεροι μαθητές, ακόμα και αυτοί που σε συνθήκες παραδοσιακής τάξης δείχνουν αδιάφοροι για το μάθημα, χρησιμοποίησαν το λογισμικό σαν εργαλείο για τη διατύπωση εικασιών. Ο δυναμικός χειρισμός των σχημάτων οδήγησε γρήγορα και με επιτυχία αρκετές ομάδες μαθητών στην επιβεβαίωση των υποθέσεών τους.

3^η Διδακτική ώρα στην παραδοσιακή τάξη με χαρτί και μολύβι

Στο περιβάλλον της τάξης η διερεύνηση έγινε με παρόμοιο τρόπο όπως και την προηγούμενη διδακτική ώρα. Οι μαθητές σχεδίασαν διάφορες ευθείες, προεκτάσεις ή μη πλευρών, διαγώνιες και παράλληλες ευθείες από διάφορες κορυφές. Στη συνέχεια υπολόγισαν πολλά εμβαδά μετρώντας βάσεις και ύψη τριγώνων. Η διερεύνησή τους συνεχίστηκε περιστρέφοντας το φύλλο εργασίας και προσπαθώντας να αποκτήσουν μία άλλη οπτική του σχήματος και πιθανόν έτσι και της ζητούμενης δραστηριότητας. Φράσεις όπως: «θέλουμε η μία πλευρά να είναι συνέχεια της άλλης», «προεκτείνουμε μέχρι να συναντηθούν», «φέρνουμε παράλληλες και μετά από πολλές προσπάθειες και ιδέες συμφωνήσαμε σε ένα σχήμα», «στην αρχή σκεφτήκαμε... μελετήσαμε... μετρήσαμε... για να σιγουρευτούμε... και τώρα βρίσκουμε..» έγραψαν στα φύλλα εργασίας και περιγράφουν εύγλωττα τα μονοπάτια που ακολούθησε η σκέψη τους. Παρά, όμως τις προσπάθειές τους μόνο μία μαθήτρια, η ίδια που είχε απαντήσει και στη δραστηριότητα της δεύτερης διδακτικής ώρας, συνέλαβε την ιδέα και καθοδήγησε πάλι την ομάδα της για να σχεδιάσουν το σχήμα και να δώσουν τη μαθηματική εξήγηση.

Συμπερασματικά κατά την εφαρμογή του τρίωρου σεναρίου, στο περιβάλλον τάξη (χαρτί και μολύβι), η νοητική ικανότητα του μαθητή ήταν αυτή που βοήθησε να προχωρήσει αποτελεσματικά να ολοκληρώσει, αιτιολογήσει και να παρουσιάσει τις δραστηριότητες που ζητήθηκαν. Το στατικό σχήμα και οι περιορισμοί που συνεπάγεται το χαρτί και το μολύβι δε διευκόλυναν τον έλεγχο εικασιών που είχαν διατυπωθεί.

Πίνακας 1. Εικόνες από τη δουλειά των μαθητών

1 ^η Δραστηριότητα στο εργαστήρι Η/Υ	1 ^η Δραστηριότητα στην τάξη
 <p data-bbox="236 607 384 629">Εμβαδόν του $\Delta AB = 44$</p> <p data-bbox="533 607 681 629">Εμβαδόν του $\Gamma AB = 44$</p>	 <p data-bbox="1244 548 1412 593">Ανεπαρκούντα στοιχεία για να βρούμε</p>
2 ^η Δραστηριότητα στο εργαστήρι Η/Υ	2 ^η Δραστηριότητα στην τάξη
 <p data-bbox="630 891 778 913">Εμβαδόν του $\Delta EHZ = 9.26$</p> <p data-bbox="646 981 794 1003">Εμβαδόν του $\Delta EKZ = 9.26$</p>	 <p data-bbox="869 1086 1396 1176">Πολύ ωραίο γιατί μας έβαλε σε ερώση και να το κάναμε σε μαθησιακά</p>
3 ^η Δραστηριότητα στο εργαστήρι Η/Υ	3 ^η Δραστηριότητα στην τάξη
 <p data-bbox="263 1332 443 1355">Εμβαδόν του $\Delta AB\Gamma\Delta = 18$</p> <p data-bbox="534 1400 683 1422">Εμβαδόν του $\Delta \Delta\Lambda\kappa = 18$</p>	

Συμπεράσματα

Η εφαρμογή αυτού του τρίωρου σεναρίου τόσο σε περιβάλλον σχολικού εργαστηρίου Η/Υ όσο και σε περιβάλλον σχολικής τάξης επιβεβαίωσε την υπάρχουσα έρευνα. Τα εργαλεία του λογισμικού διευκόλυναν τη νοητή δημιουργία εννοιών καθώς και την αναγνώριση σχέσεων και κανονικοτήτων. Ενώ στο παραδοσιακό μοντέλο οι περιορισμοί που επιβάλλει

το χαρτί και το μολύβι εγκλώβισαν την πλειοψηφία των μαθητών σε αναποτελεσματικές προσπάθειες. Διατύπωσαν εικασίες αλλά το στατικό σχήμα δυσκόλεψε τον πειραματισμό και τον έλεγχο των εικασιών. Η νοητική ικανότητα ήταν το βασικό «εργαλείο» που μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν. Αντίθετα στο εργαστήριο Η/Υ οι μαθητές αξιοποίησαν τις δυνατότητες του λογισμικού geogebra κάνοντας πειράματα και διερευνήσεις, αναπτύσσοντας εικασίες και υποθέσεις και γενικά αξιοποιώντας τα ώστε να κατασκευάσουν οι ίδιοι τις μαθηματικές έννοιες. Αυτή ήταν η πρώτη φορά που ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές έκαναν χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών στο μάθημα των Μαθηματικών. Την πρώτη διδακτική ώρα ξεκίνησαν να χρησιμοποιούν το λογισμικό όπως το χαρτί και το μολύβι δηλαδή σχεδιάζοντας ελεύθερα. Όσο περνούσε η ώρα, όμως, άρχισαν να αντιλαμβάνονται τις δυνατότητες του λογισμικού και να τις αξιοποιούν αβίαστα. Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις πως όταν η χρήση λογισμικών εμπεδωθεί στη σχολική κουλτούρα τότε τα λογισμικά θα χρησιμοποιηθούν με πιο παραγωγικό τρόπο, θα ενισχυθεί η μαθηματική σκέψη των μαθητών και η δημιουργία βιωματικής μάθησης μέσα από πειραματισμό και συλλογικές δράσεις.

Αναφορές

- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., Robutti, O., (2002). A cognitive analysis of dragging practises in cabri environments *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, June 2002, Volume 34, Issue 3, pp 66-72.
- Kapa, E., (2001). A metacognitive support during the process of problem solving in a computerised environment, *Educational Studies in Mathematics* 47, 317–336.
- Kaput, J., (1998). Technology as a Transformative force in education. What else is needed to make it work. Paper for the N.C.T.M 2000 technology working group in May 1998.
- Laborde C., Kynigos, C., Hollebrands, K., Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Sense Publishers, In A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), 275–304.
- Noss, R. & Hoyles, C., (1996). *Windows on mathematical meanings learning cultures and computer*, Holland: Kluwer.
- Ζωγόπουλος, Ε., (2013). Η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας και η συμβολή των ΤΠΕ, *Τα Εκπαιδευτικά*, τεύχος 105-106, σελ. 60-73.
- Κεΐσογλου, Σ., (2006). Υπολογιστικοί Δυναμικοί μικρόκοσμοι κατασκευής και διερεύνησης ιστορικών καμπύλων. *Περιοδικό Αστρολάβος* Τεύχος 5 σελ. 122-135. Εκδόσεις Ε.Μ.Ε.
- Κυνηγός, Χ., Ψυχάρης, Γ., Γαβρίλης, Κ., Κεΐσογλου, Σ., (2008). Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης, Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03, ΕΑΙΤΥ.