Επαναπροσδιορίζοντας το ρόλο της τεχνολογίας στη μαθηματική παιδεία αιχμής

Ζήνων Λυγάτσικας
zligatsikas@gmail.com

Μαθηματικός ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

Περίληψη. Δεν είναι υπερβολικό να ισχυριστούμε ότι η αποτελεσματικότητα της τεχνολογίας στην βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν είναι αυτή που περιμέναμε. Παρ' όλα αυτά το πρώτο βήμα έγινε και το δεύτερο βήμα είναι μπροστά μας. Τα πειραματικά μαθηματικά (μετ. experimental mathematics) είναι ένας ανερχόμενος τομέας της μαθηματικής πρακτικής, δεν έχει τίποτα κοινό με τις μεθόδους της διδακτικής και αργά ή γρήγορα θα μας προβληματίσει εξ αιτίας της αποτελεσματικότητάς του. Η παρούσα εργασία έχει σαν στόχο να καταδείξει το επόμενο στάδιο της όλης προσπάθειας βελτιστοποίησης των αποτελεσμάτων της εκπαίδευσης με την βοήθεια της τεχνολογίας, που όπως πιστεύουμε πρέπει να χαρακτηρίζεται από μια ανατρεπτική διάθεση ώστε να βοηθά την αναθεώρηση των προτεραιοτήτων και να ανεβάζει την αποτελεσματικότητα της εκπαίδευσης. Στα δύο πρώτα κεφάλαια θα παρουσιάσουμε τα πειραματικά μαθηματικά και τα υπολογιστικά συστήματα που χρησιμοποιούμε μέχρι σήμερα για τον σκοπό αυτό και μετά θα παρουσιάσουμε έντεκα προβλήματα στο επίπεδο των μαθηματικών του Λυκείου, σαν ένα δείγμα δραστηριοτήτων που θα μπορούσαν να υποστηριχθούν από την διερευνητική χρήση της τεχνολογίας.

Λέξεις κλειδιά: Εκπαιδευτική τεχνολογία, Πειραματικά Μαθηματικά, Συστήματα Συμβολικού Υπολογισμού, Συστήματα Αυτοματοποίησης Αποδείξεων.

Εισαγωγή

Στις 14 Ιουνίου 2013 το Center for American Progress δημοσίευσε μια έκθεση του Ulrich Boser που αφορούσε την αξιολόγηση της απόδοσης της τεχνολογίας που επενδύθηκε σαν εργαλείο μάθησης στην αμερικάνικη εκπαίδευση, δες Center for American Progress (2013). Στην έκθεση αυτή ο Boser παρουσιάζει στατιστικά δεδομένα αξιολογώντας αρνητικά την μέχρι σήμερα χρήση της τεχνολογίας στα σχολεία και στα πανεπιστήμια των ΗΠΑ και τελειώνει κάνοντας συστάσεις (στον διοικητικό τομέα) για την βελτίωση και την μεγιστοποίηση των θετικών αποτελεσμάτων προς όφελος της εκπαιδευτικής κοινότητας υπό ορισμένες προϋποθέσεις.

Τα συμπεράσματα της έκθεσης αφορούν όλους τους τομείς που εμπλέκονται στην διαδικασία της εκπαίδευσης και θα μπορούσαν πολύ καλά να ισχύσουν και στην δικιά μας χώρα. Το κύριο αίτημα, και αυτό που μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία, είναι ότι πρέπει να πάμε ένα βήμα πιο πέρα, αφού σκεφτούμε διακριτούς μαθησιακούς στόχους, χρηματοδοτήσουμε γενναία την προσπάθεια και, προσθέτω, επαναπροσδιορίσουμε την συμβατότητα του εκπαιδευτικού προγραμματισμού με την εξέλιξη της ίδιας της επιστήμης που υπηρετούμε. Μέχρι σήμερα η τεχνολογία βοηθούσε την τρέχουσα διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών, αλλά ποτέ δεν θεωρήθηκε σαν κάτι που μπορεί να την αλλάξει.

Όταν εφαρμόσουμε συστηματικά και με στρατηγική τα επιτεύγματα της τεχνολογίας, οι επιπτώσεις στο status quo της εκπαίδευσης θα είναι τέτοιου μεγέθους ώστε μπορεί να βελτιωθεί η αποτελεσματικότητά της. Σε μικρές χώρες όπως η δική μας τα προσδοκώμενα οφέλη, αυτού του είδους της ανατρεπτικής τεχνολογίας θα δημιουργήσουν εκπαιδευτικά προϊόντα και υπηρεσίες που θα είναι κλιμακούμενες και καλύτερες - λιγότερο δαπανηρές και πιο δημιουργικές, χρήσιμες και εύστοχες - όπως ευθύβολα παρατήρησε ο καθηγητής Clayton M. Christensen από το Harvard Business School, δες Christensen C.M. (1997). Η μαθηματική επιστήμη έχει μια προνομιούχα θέση μεταξύ των άλλων κλάδων και αυτό δεν είναι τυχαίο. Όπως κατέδειξε η έρευνα των Αμερικανών, μόνο στα μαθηματικά οι μαθητές χρησιμοποιούν συστηματικά την τεχνολογία για να βελτιώσουν τις βασικές δεξιότητες στις ασκήσεις και στην κατανόηση της θεωρίας. Αυτό είναι πέρα για πέρα αληθές εκ των πραγμάτων. Μόνο τα μαθηματικά και ενδεχομένως η φυσική είναι σε θέση να ενσωματώσουν ουσιαστικά την συγκεκριμένη τεχνολογία είτε μέσα στο υπολογιστικό τους κομμάτι είτε στο πειραματικό. Από αυτούς ξεκίνησε άλλωστε.

Υπάρχει ένα ουσιαστικό και «φιλοσοφικό» ερώτημα στην καθαρή μαθηματική επιστήμη σχετικά με την αποτελεσματικότητα και την εγκυρότητα της χρήσης του υπολογιστή καθώς και με τον ρόλο των πειραματικών μαθηματικών (experimental mathematics) στην μαθηματική διαδικασία. Αν και στο ερευνητικό πεδίο το σενάριο της ουσιαστικής χρήσης υπολογιστικών συστημάτων, υπόσχεται μια ενδιαφέρουσα περιπέτεια, στην παιδεία το σενάριο αυτό ανατρέπει τον μέχρι σήμερα σχεδιασμό των αναλυτικών προγραμμάτων που έχουν βασισθεί πάνω σε κάποιες κοινωνικές πεποιθήσεις των περασμένων δεκαετιών, οι οποίες πολλές φορές δεν υπηρετούσαν την ίδια την επιστήμη, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν πενιχρά έως μηδενικά θετικά αποτελέσματα σε ευρύτερο επίπεδο, όπως άλλωστε και η συστηματική έρευνα του Center for American Progress το υποδεικνύει.

Παρ' όλα αυτά, το τοπίο δεν είναι τόσο τραχύ και αυτό θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε στην μελέτη αυτή. Πιστεύουμε ότι η τεχνολογία πρέπει να εφαρμόζεται εσχατολογικά, σε όλη της τη διάσταση, και μερικές φορές με ένα πειρατικό στυλ[1], όπως έλεγε το 1994 ο Sir Michael Atiyah (Atiyah et. al., 1994). Παρ' όλα αυτά δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη με ιστορία που εν πολλοίς μας ξεπερνά, για τον λόγο αυτό πρέπει να αναζητήσουμε το που οι υπολογιστές είναι ουσιαστικοί για τον μαθηματικό πειραματισμό και που τα πειραματικά μαθηματικά είναι ουσιαστικά για να μας οδηγήσουν σε μαθηματικές αποδεικτικές διαδικασίες. Αυτό που χρειαζόμαστε τώρα δεν είναι να δούμε την φιλοσοφία των υπολογιστών στα μαθηματικά, όπως κάναμε 30 χρόνια πριν, αλλά πολύ απλά να δούμε καλύτερα την φιλοσοφία των μαθηματικών (Avigad, 2008).

Δεν θα ασχοληθούμε εδώ με την διδακτική προσέγγιση, του πως δηλαδή θα ενσωματώσουμε την τεχνολογία αιχμής στην καθημερινή πρακτική. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην βιβλιογραφία όπου έχουμε επεξεργασθεί συγκεκριμένες θεματικές ενότητες του υπάρχοντος αναλυτικού προγράμματος (Λυγάτσικας, 2006; 2008a; 2008b; 2010; 2013). Αναπόφευκτα ο προβληματισμός μας συνδέεται με την ύπαρξη και διάθεση ισχυρών λογισμικών τα οποία έχουν πιστοποιημένη υπολογιστική αξία σε όλο το φάσμα της μαθηματικής πρακτικής, από το στοιχειώδες έως την έρευνα. Τα ήδη υπάρχοντα λογισμικά καθώς και τα πλείστα ψηφιακά μέσα, που ευρέως χρησιμοποιούνται σήμερα στην σχολική πρακτική, δεν παίζουν πρωτεύοντα ρόλο. Στην ανακοίνωση αυτή κρίνουμε απαραίτητο να

[1] Το οποίο δικαιολογεί οποιεσδήποτε παρακλήσεις του κανόνα, πολύ ρομαντική ιδέα πράγματι!

παρουσιάσουμε το υλικό πάνω στο οποίο μπορούμε να οικοδομήσουμε την προσέγγιση τεχνολογίας και εκπαίδευσης.

Παρουσίαση των υπολογιστικών συστημάτων

Τα γνωστά μας συστήματα δυναμικής γεωμετρίας αν δεν καταφέρουν να εξελιχθούν στο άμεσο μέλλον, με κόστος την αύξηση της χρονικής και χωρικής πολυπλοκότητας, δεν θα μπορέσουν να παίξουν τον αντίστοιχο ρόλο που παίξανε στο πρώτο στάδιο εφαρμογής των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση[2]. Θα ασχοληθούμε ως επί το πλείστον με λογισμικά που έχουν μια ουσιαστική μαθηματική πιστοποίηση και ακρίβεια και μπορεί να χρησιμοποιηθούν για αποτελέσματα και υπολογισμούς σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Τα λογισμικά αυτά αφού διάνυσαν διάφορα στάδια εξέλιξης από το τέλος της δεκαετίας του ’80 μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο ομάδες:

1) Formal Proof software: ξεκινώντας από τα αποτελέσματα στην δεκαετία του ’50, πάνω στην τεχνητή ευφυΐα, δημιουργήθηκε μια σειρά λογισμικών (formal Proof theory) που αφορούσαν τον λογικό έλεγχο των μαθηματικών αποδείξεων. Τέτοια λογισμικά (automatic reasoning systems) είναι τα: HOL Light, Mizar, ProofPower, Isabelle, Coq, δείτε Wiedijk Freek (2008). Το τελευταίο επίτευγμα αυτής της τάσης θα μας απασχολήσει ευθύς αμέσως.

2) Symbolic Computation Software: ξεκινώντας κυρίως από φυσικούς[3] στοχευμένα αρχικά σε αλγεβρικούς και αριθμητικούς υπολογισμούς μεγάλης ακρίβειας (για παράδειγμα στην φυσική υψηλής ενέργειας, ουράνια μηχανική κ.λπ.), υιοθετήθηκαν από τους μαθηματικούς οι οποίοι πέρασαν στο δεύτερο στάδιο εξέλιξης με την δημιουργία αποτελεσματικότερων και γενικευμένων αλγορίθμων, όπως οι αλγόριθμοι ολοκλήρωσης, οι αλγόριθμοι απαλοιφής ποσοδεικτών των Tarski-Collins, ο αλγόριθμος της βάσης του Groebner και ο αλγόριθμος Wu. Το αποτέλεσμα αυτής της εξέλιξης είναι μια σειρά από αξιόπιστα υπολογιστικά συστήματα (Symbolic Computation Systems και Automated Geometry Theorem Prover) που αντικαθιστούν επίπονους υπολογισμούς ή ακόμα βεβαιώνουν την αλήθεια ή όχι ενός γεωμετρικού ή ενός αλγεβρικού ισχυρισμού. Για περισσότερες πληροφορίες δες (Tarski, 1951), (Cox et al., 1991), (Chou, 1988) και (Wu When-tsun. 1994).

Το τελευταίο επίτευγμα της πρώτης κατηγορίας λογισμικών είναι η επαλήθευση της απόδειξης των Fiet - Thompson. Το θεώρημα αυτό είναι συναρπαστικό γιατί, είναι πολύ μικρό και έχει πολύ μεγάλη απόδειξη, 250 σελίδες (Burnside, 1911; Feit et al., 1962; 1963). Το θεώρημα λέει ότι : κάθε πεπερασμένη ομάδα με περιττό αριθμό στοιχείων είναι επιλύσιμη. Στις 20 Σεπτεμβρίου 2012 η ερευνητική ομάδα Inria - Microsoft Research υπό την εποπτεία του Georges Gonthier ανακοίνωσε την επαλήθευση της ορθότητας της απόδειξης με υπολογιστή, ποιο συγκεκριμένα με την χρήση του λογισμικού Coq, του θεωρήματος των Feit και Thompson (Gonthier, 2008; Hales, 2008; Harrison, 2008; Wiedijk Freek, 2008). Η είδηση του Σεπτεμβρίου φαίνεται να ενθαρρύνει, εξ’ αιτίας της πολυπλοκότητας της μαθηματικής απόδειξης, τον ενθουσιασμό κάποιων μαθηματικών που

[2] Ένα βήμα προς την βελτίωση των επιδόσεων των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας, είναι οι τελευταίες εκδόσεις του GeoGebra, στις οποίες ενσωματώνονται κάποιοι βασικοί αλγόριθμοι υπολογιστικής άλγεβρας.

[3] Κλασικό παράδειγμα ο Stephen Wolfram του University of Illinois και το δημιούργημά του το γνωστό μας Mathematica.

είδαν σαν άθλο της επιστήμης των υπολογιστών το κατόρθωμα να ελεγχθεί σε όλη την έκτασή του ένα κόσμημα της ανθρώπινης σκέψης, η απόδειξη των Feit, Thompson. Ενώ όμως μπορείτε να ελέγξετε με κανόνες την ορθότητα μιας απόδειξης, που σημαίνει ότι γνωρίζετε άριστα τους κανόνες του παιχνιδιού, δεν σημαίνει ότι είστε και άριστος παίκτης, για να θυμηθούμε μια ρήση των Bourbaki. Όχι, κάνετε λάθος. Το εγχείρημα δεν ψάχνει τον άριστο παίκτη. Είναι ένα εργαλείο και μάλιστα χρησιμότατο. Όπως πολύ σωστά αναφέρει ο Harrisson (2008), υπάρχουν δύο ουσιαστικοί λόγοι που θα δικαιολογούσαν την δημιουργία συστημάτων ελέγχου της ορθότητας αποδείξεων: να πιστοποιηθεί ή να διαψευσθεί η θεμελίωση των μαθηματικών πάνω σε κανόνες της λογικής και της θεωρίας συνόλων και να βελτιωθεί η ακρίβεια, η αποτελεσματικότητα και η αξιοπιστία των μαθηματικών αποδείξεων. Σχέδια φιλόδοξα, μόνο που τα μαθηματικά, ιδίως τα καθαρά μαθηματικά, δεν επιδίωξαν τουλάχιστον μέχρι σήμερα την βοήθειά τους. Πάντως, για να είμαστε δίκαιοι, αναλογισθείτε πόσες λάθος αποδείξεις είχαμε στην ιστορία των μαθηματικών: τις αποδείξεις των Lagrange, Laplace καθώς και όλους τους λάθος υπολογισμούς του Fourier στο βασικό άρθρο της θεωρίας του ή αν θέλετε ακόμα, τα «βασιλικά» λάθη του Poincare χάρη στα οποία πήρε το βραβείο από τον βασιλιά Oscar[4] το 1887!

Ακόμα και ο ποιο αισιόδοξος όμως θα αντιμετωπίσει ένα υπαρκτό πρόβλημα καθόλου αμελητέο. Για να εκτελέσει κάποιος σήμερα μία τέτοιου είδους έρευνα με τους υπολογιστές, πρέπει να επενδύσει πολύ χρόνο σε ξεχωριστές δεξιότητες οι οποίες λαμβάνουν χώρα πολύ μακριά από την πραγματική εργασία του. Πόσοι μαθηματικοί είναι έτοιμοι να κάνουν μια τέτοια προσπάθεια; Είναι πολύ νωρίς για να έχουμε μια εικόνα της επίδρασης πάνω στο μαθηματικό έργο γενικά.

Η καθαυτή μαθηματική απόδειξη παραμένει άθικτη, το νέο είναι η έλευση ενός γραφειοκρατικού ελεγκτικού μηχανισμού έξω από τα ίδια τα μαθηματικά (βασισμένο στην λογική) που μπορεί να ελέγχει αποδείξεις. Παρ' όλα αυτά, σε μια κορυφαία στιγμή των μαθηματικών αναφέρομαι στην απόδειξη του Wiles, είδαμε ότι η μαθηματική σκέψη που ξεκινάει από τον Ευκλείδη είναι ικανή ακόμα και στις μέρες μας, να αποδεικνύει με χαρτί και μολύβι σύνθετα και άκρως πλούσια και όμορφα θεωρήματα.

Ας περάσουμε στην άλλη ομάδα η οποία κατά την γνώμη μας δουλεύει αθόρυβα σε μια νέα περιοχή τα πειραματικά μαθηματικά. Αφού προσπάθησε να βρει, και βρήκε, αλγορίθμους γενικευμένους και ακριβείς, κατόρθωσε με μικρά αλλά βέβαια βήματα να επωμισθεί ένα αξιοσέβαστο υπολογιστικό κομμάτι των μαθηματικών και της φυσικής. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε για τους υπολογισμούς, εύκολα γενικεύθηκαν με την βοήθεια της άλγεβρας, και αντικατέστησαν ακόμα και ένα μέρος των γεωμετρικών προβλημάτων, δες Wu Wen-tsun (1994). Αποτέλεσμα όλων αυτών των προσπαθειών είναι μια σειρά γνωστών συμβολικών υπολογιστικών συστημάτων, τα οποία χρησιμοποιούν αποκλειστικά αλγεβρικούς αλγορίθμους, όπως τα Mathematica[5], Maple[6], PSLQ, δείτε στο (Bailey et al., 2006), CoCoA[7], GEX[8], ή το ισχυρότερο και το πλέον γενικευμένο A#[9].

[4] Ο Cédric Villani παρουσίασε μια εργασία πάνω στα μεγαλύτερα και στα χειρότερα λάθη που έκανε ο Poincare, δες http://www.webtv.univ-montp2.fr/14199/

[5] website: www.wolfram.com/mathematica

[6] website: www.maplesoft.com/products/maple/

[7] website: http://cocoa.dima.unige.it

[8] website: http://www.cs.wichita.edu/~ye/

[9] Thomas J. Watson Research Center.

Αφενός η πολυπλοκότητα των αλγεβρικών εξισώσεων, που προκύπτουν από την ερμηνεία των δεδομένων και του συμπεράσματος ενός μη στοιχειώδους προβλήματος, και αφετέρου οι περιορισμοί των δυνατοτήτων που υπαγορεύει το ίδιο το hardware στις κοινές πλατφόρμες, στέρησαν πολύ γρήγορα τα συστήματα μηχανικών αποδείξεων από την δυνατότητα να εξερευνήσουν μεγάλα και δύσκολα προβλήματα.

Παρ' όλα αυτά βρήκαν πολύ νωρίς έναν πιστό σύμμαχο, τους οραματιστές της αλλαγής στο σκηνικό της μαθηματικής εκπαίδευσης, δείτε στο (Buchberger, 1992; 1993), (Kutzler, 1994) και (Wu Wen-tsun, 1994). Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο μερικά παραδείγματα.

Επηρεασμένη η μαθηματική κοινότητα από την εισαγωγή της διδακτικής στην δεκαετία του 80 και μετέπειτα θα σταθεί αμήχανη μπροστά στην προκατάληψη των αναλυτικών προγραμμάτων σχετικά με τον παιδευτικό ρόλο κορυφαίων μαθηματικών διεργασιών όπως οι γεωμετρικές αποδείξεις, οι οποίες θεωρήθηκαν ουσιαστικά ένα βάρος, δεν υπερβάλλω, στην νοητική εξέλιξη των μαθητών. Έτσι ακούστηκαν, και ακούγονται μέχρι σήμερα, φράσεις που προτρέπουν την εγκατάλειψη των αποδείξεων, όπως για παράδειγμα την απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος, η οποία μπορεί να αντικατασταθεί επαρκέστατα, όπως έχουν ισχυρισθεί, από μια απλή αριθμητική επαλήθευση της σχέσης των τετραγώνων των πλευρών ενός τριγώνου ή στην καλύτερη των περιπτώσεων, με την διατύπωση ενός ισχυρισμού σχετικού με την πυθαγόρεια σχέση. Αποτέλεσμα της τάσης αυτής ήταν η φρενίτιδα του όλου συστήματος που αφορούσε μια απλή εκτίμηση ότι έτσι θα απελευθερωνόταν η δημιουργικότητα και οι δεξιότητες του μαθητικού δυναμικού. Μια απελευθέρωση όμως που ποτέ δεν ήρθε: ποτέ μαθητής δεν διατύπωσε με την μεθοδολογία αυτή έστω και έναν στοιχειώδη μαθηματικό ισχυρισμό, και την οποία δεν την χρεώνουμε στην απειρία του εκπαιδευτικού προσωπικού. Το σκηνικό των αναθεωρήσεων των αναλυτικών προγραμμάτων ήταν ποτισμένο με την επικράτηση μιας μεταμοντέρνας συσχετικότητας που έχει καταργήσει επικίνδυνα την ιεραρχία και ήταν διάχυτη σε όλες τις δραστηριότητες των μεταπολεμικών κοινωνιών. Στο πλαίσιο αυτό εντάσσουμε και τις κορώνες των New York Times, δείτε στο Horgan (1993), σχετικά με τον «θάνατο των αποδεικτικών διαδικασιών – Death of Proofs». Το εγχείρημα δεν αφορά τελικά τα μαθηματικά αλλά έχει καθαρά κοινωνικά αίτια.

Πειραματικά Μαθηματικά

Τα πειραματικά μαθηματικά (Experimental Mathematics) είναι μια προσέγγιση των μαθηματικών στην οποία οι αριθμητικοί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται για την διερεύνηση μαθηματικών αντικειμένων και τον προσδιορισμό ιδιοτήτων και μοτίβων. Αυτός είναι ένας ορισμός που δίνεται από την Wikipedia. Ο Borwein et al. (1996)[10], όπως και ο Delvin (2010), έδωσαν πάνω κάτω τον ίδιο ορισμό, τονίζοντας ότι τα πειραματικά μαθηματικά είναι ένας τρόπος επικοινωνίας αποτελεσμάτων μεταξύ της μαθηματικής κοινότητας, που έχουν εξαχθεί από μια συγκεκριμένη πειραματική διαδικασία διερεύνησης εικασιών, πεποιθήσεων και από την προσεκτική ανάλυση των δεδομένων που αποκτήθηκαν μέσα από αυτήν την διαδικασία.

[10] Experimental Mathematics is that branch of mathematics that concerns itself ultimately with the codification and transmission of insights within the mathematical community through the use of experimental (in either the Galilean, Baconian, Aristotelian or Kantian sense) exploration of conjectures and more informal beliefs and a careful analysis of the data acquired in this pursuit. (Borwein et al., 1996, p. 17).

Είναι σε όλους γνωστός ο πρόωρος πειραματισμός του Gauss πάνω στην πυκνότητα των πρώτων αριθμών που οδήγησε στην ανακάλυψη του γνωστού θεωρήματος των πρώτων αριθμών, του οποίου η απόδειξη έγινε μετά από 100 σχεδόν χρόνια σχεδόν. Αυτό είναι ένα κλασσικό παράδειγμα μαθηματικού πειραματισμού σαν ένα προγενέστερο στάδιο της απόδειξης ή ένα σημειωματάριο του μαθηματικού με πιθανόν επιστημολογικό ενδιαφέρον. Σήμερα τα πειραματικά μαθηματικά είναι μια συμβολή στην γενική μαθηματική γνώση γνωρίζοντας όμως ότι πολλοί ισχυρισμοί μπορεί να μην είναι αποδείξιμοι. Αλλά, ο πειραματισμός με τον έναν ή τον άλλο τρόπο παραμένει μια συμβολή στην ανακάλυψη ενώ η απόδειξη είναι η αποκλειστική πιστοποίηση της αλήθειας ενός μαθηματικού ισχυρισμού.

Παρά το ότι σε μια κορυφαία στιγμή της αποδεικτικής διαδικασίας όπως η απόδειξη του ισχυρισμού του Fermat, ο Wiles δεν βασίστηκε σε καμία πειραματική παρατήρηση παραγόμενη με την βοήθεια των υπολογιστών, η συμβολή των υπολογιστικών συστημάτων παίζει έναν ρόλο στην σύγχρονη μαθηματική δημιουργία. Την δεκαετία του 1990 πολύ μαθηματικοί υποστήριξαν ανοικτά την χρήση των υπολογιστικών συστημάτων είτε στους υπολογισμούς είτε στην αναπαράσταση μαθηματικών αντικειμένων. Σημαντική στην κατεύθυνση αυτή είναι η θετική γνώμη του Bill Thurston όπως μας την παρουσιάζει ο Horgan στο Horgan (1993).

Είναι όμως ικανοί οι πειραματισμοί να φτάσουν σε τέτοιο βαθμό ώστε να μπορούν να δημιουργήσουν ένα δικό τους status quo στην μαθηματικοί δημιουργία; Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που κατά την γνώμη μας θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε το αντικείμενο αυτής της μαθηματικής δραστηριότητας. Ο αλγόριθμος PSLQ παίρνει στην είσοδο ένα διάνυσμα πραγματικών (ή και μιγαδικών) αριθμών μεγάλης ακρίβειας, έστω (x1,x2,…,xn) Є Rn και δίνει στην έξοδο μετά από ένα ορισμένο αριθμό βημάτων

1. ένα ακέραιο διάνυσμα $(m_1,m_2,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ έτσι ώστε ο γραμμικός συνδυασμός $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{m_k} \cdot \mathrm{x_k}$ είναι με πολύ μεγάλη ακρίβεια σχεδόν μηδέν, ή
2. ένα κάτω φράγμα r έτσι ώστε όλα τα ακέραια διανύσματα φραγμένα από το r να δίνουν αποδεδειγμένα άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{m_k} \cdot \mathrm{x_k}$ διαφορετικό από το 0.

Συνοψίζοντας, ο αλγόριθμος δίνει είτε μια υπόδειξη του ποια μπορεί να είναι η ακέραια σχέση των αριθμών της εισόδου ή ένα φράγμα δείχνοντας ότι η γραμμική σχέση ισχύει για πολύ μεγάλους συντελεστές. Ο αλγόριθμος μπορεί να ελέγξει επίσης, πότε μια αριθμητική σταθερά είναι αλγεβρικός αριθμός ή όχι.

Θα δώσουμε ένα κλασικό παράδειγμα που περιγράφεται στο Bailey et al. (1994) και στο Borwein et al. (1996) και αναφέρεται στον υπολογισμό του αθροίσματος του Euler

$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\right)^{\mathbf{2}} \mathbf{k}^{-\mathbf{2}}$$

Τον Απρίλιο του 1993, ο Enrico Au-Yeung, ένας μεταπτυχιακός φοιτητής του Yale, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο PSLQ, παρατήρησε ότι το παραπάνω άθροισμα είναι ίσο με

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\cdots+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\right)^{\mathbf{2}}\mathbf{k}^{-\mathbf{2}} \quad = \quad \mathbf{4.59987}$$

$$\approx \quad \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{4})=\frac{\mathbf{17}\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{4}}}{\mathbf{360}}$$

όπου ζ(n) είναι η συνάρτηση zeta του Riemann:

$$\zeta(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{k}^{-\mathrm{n}}$$

Αυτό ήταν η αρχή ώστε να αρχίσουν την διερεύνηση με μεγαλύτερη αριθμητική ακρίβεια. Όταν η σχέση επιβεβαιώθηκε με μεγαλύτερη ακρίβεια, δεσμεύτηκαν να γενικεύσουν και να δημιουργήσουν ένα πλαίσιο για την πειραματική διερεύνηση παρόμοιων ισχυρισμών με τον αλγόριθμο PSLQ. Τα αποτελέσματα, όπως δημοσιεύονται στο Borwein et al. (1996), είναι τα εξής, αν

$$s_h(m,n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{m}}(\mathrm{k}+1)^{-\mathrm{n}},\ \ \mathrm{m}\geq 1,\mathrm{n}\geq 2$$

τα παρακάτω πειραματικά δεδομένα έχουν αποδειχθεί:

$$\begin{aligned} s_h(2,2) &= \frac{3}{2}\zeta(4)+\frac{1}{2}\zeta^2(2)=\frac{11\pi^4}{360},\ \ (1996)\\ s_h(2,4) &= \frac{2}{3}\zeta(6)-\frac{1}{3}\zeta(2)\zeta(4)+\frac{1}{3}\zeta^3(2)-\zeta^2(3)=\frac{37\pi^6}{22680}-\zeta^2(3), \qquad (1996)\end{aligned}$$

ενώ παραμένουν αναπόδεκτοι ισχυρισμοί σχέσεις όπως οι

$$\begin{aligned} s_h(3,2) &= \frac{15}{2}\zeta(5)+\zeta(2)\zeta(3)\\ s_h(3,3) &= -\frac{33}{16}\zeta(6)+2\zeta^2(3)\end{aligned}$$

Μπορούμε να βρούμε και άλλα παραδείγματα, όπως την έρευνα του G. J. Chaitin πάνω στις ιδιότητες των κανονικών πραγματικών αριθμών (Chaitin, 1994; Borwein & Bailey, 2005). Επίσης, για μια αναλυτική παρουσίαση αποτελεσμάτων μπορείτε να συμβουλευθείτε τα: Experimental Mathematics Journal στο http://www.expmath.org/, Experimental Mathematics Website στο http://www.experimentalmath.info καθώς και στο Instituts für Experimentelle Mathematik στο http://web.iem.uni-due.de/.

Αν νομίζετε ότι όλα αυτά συμβαίνουν στην μαθηματική έρευνα και δεν αφορούν καμία άλλη βαθμίδα εκπαίδευσης, σας πληροφορώ ότι στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση το τοπίο είναι καλύτερο. Εδώ, αφενός μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα δύο βασικά συστήματα συμβολικού υπολογισμού Maple και Mathematica, αφετέρου τα συστήματα αυτοματοποίησης αποδείξεων της Γεωμετρίας.

Νέα προβλήματα των οποίων η αλγεβρική πολυπλοκότητα είναι τεράστια θα τα λύσετε ευκολότερα με τα συστήματα αυτού του είδους, όπως το πρόβλημα Kahan (1975). Επίσης, καθαρά γεωμετρικά προβλήματα θα μπορέσετε να τα διερευνήσετε ή να χρησιμοποιήσετε εντελώς πρωτότυπες και σύνθετες τεχνικές για να επιβεβαιώσετε την αλήθεια νέων γεωμετρικών προβλημάτων. Στο (Chou, 1988) θα βρείτε μια συλλογή από γεωμετρικά προβλήματα που λύθηκαν με την μέθοδο Wu.

Πως θα χαρακτηρίζαμε την εργασία του μαθηματικού πειραματισμού; O Delvin K. (2010), δίνει μια λίστα χαρακτηριστικών που δεν έχουμε λόγο να μην συμφωνήσουμε:

1) Χρήση των συστημάτων Συμβολικού Υπολογισμού όπως Maple, Mathematica και συστήματα αυτοματοποιημένων αποδείξεων.
2) Χρήση διαφόρων μεθόδων εξαγωγής δεδομένων από οπτικοποίηση των μαθηματικών αντικειμένων, όπως Visual.ly, VTK, Yoix, Sci2 και άλλα.
3) Μέθοδοι μεγάλης ακρίβειας και floating - point αριθμητική.
4) Μέθοδοι μεγάλης ακρίβειας υπολογισμού ολοκληρωμάτων και αθροίσματος σειρών.
5) Αλγόριθμοι εύρεσης αριθμητικών σχέσεων με αλγορίθμους όπως PSLQ.
6) Προσεγγίσεις των συνεχών συναρτήσεων.
7) Ταυτοποίηση συναρτήσεων βασισμένων σε γραφικά δεδομένα.

Παραδείγματα χρήσης των παραπάνω χαρακτηριστικών μπορείτε να βρείτε στην διεθνή βιβλιογραφία και για την δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο εργαστήριο ACDCA της Αυστρίας.

Είναι φυσικό να ρωτήσουμε στο σημείο αυτό, αν το πείραμα στα μαθηματικά κατέχει την ίδια θέση όπως στις λεγόμενες φυσικές επιστήμες. Είναι γνωστό στον επιστημονικό κόσμο ότι ο Imre Lakatos έχει ήδη από το 1976 τραβήξει την διαχωριστική γραμμή μεταξύ των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών. Ας δούμε μετά από 40 χρόνια πως μπορεί να αναδιατυπωθεί η σχέση αυτή.

Στα μαθηματικά η πειραματική διαδικασία έχει περιοριστεί στην σφαίρα της ανακάλυψης ενώ η απόδειξη παραμένει ο αποκλειστικός τρόπος επιβεβαίωσης των ισχυρισμών. Το πείραμα στα μαθηματικά θα λέγαμε ότι αντιστοιχεί στην ευρετική μέθοδο του F. Bacon. Δηλαδή στην μέθοδο που δίνει την δυνατότητα σταδιακά να γενικευθεί το αποτέλεσμα και βασίζεται αποκλειστικά στην συσσώρευση δεδομένων μέσα από ποικίλα και πολύμορφα πειραματικά αποτελέσματα. Αντίθετα στις άλλες επιστήμες η πειραματική διαδικασία χρησιμοποιείται παραδοσιακά, σύμφωνα με την μέθοδο του Γαλιλαίο, δηλαδή στην επιβεβαίωση μιας θεωρίας, στην ανακάλυψη και στην συλλογή δεδομένων.

Επίσης, σημειώστε ότι πάντα υπάρχει ανοικτή μια ηθική ερώτηση για τους μαθηματικούς ιδίως μετά την δεκαετία του 1990, για το αν τα μαθηματικά πειραματικά εργαλεία, όπως οι αλγόριθμοι, μπορούν να επιβεβαιώσουν την αλήθεια ή όχι μιας μαθηματικής πρότασης. Θετικά παραδείγματα στην κατεύθυνση αυτή έχουμε πολλά, όπως στο (Ekhad et al., 1996).

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τους οπαδούς της πειραματικής διαδικασίας, ο υπολογιστής δίνει την δυνατότητα:

1) Απόκτησης διορατικότητας και διαίσθησης.
2) Ανακάλυψης νέων μοτίβων και σχέσεων.
3) Η χρήση γραφικών απεικονίσεων μπορεί να δηλώνουν υποκρύπτουσες μαθηματικές αρχές.
4) Δοκιμές και επαλήθευση εικασιών.
5) Να εξερευνήσουμε ένα αποτέλεσμα για να δούμε αν αξίζει τον κόπο μια αυθεντική απόδειξη.
6) Να υποδείξουμε προσεγγίσεις για την αυθεντική μαθηματική απόδειξη.

7) Να αντικαταστήσουμε πολύπλοκες πράξεις με αποτελέσματα που εξάγονται από υπολογιστή.
8) Να επιβεβαιώσουμε αναλυτικά παραγόμενα αποτελέσματα.

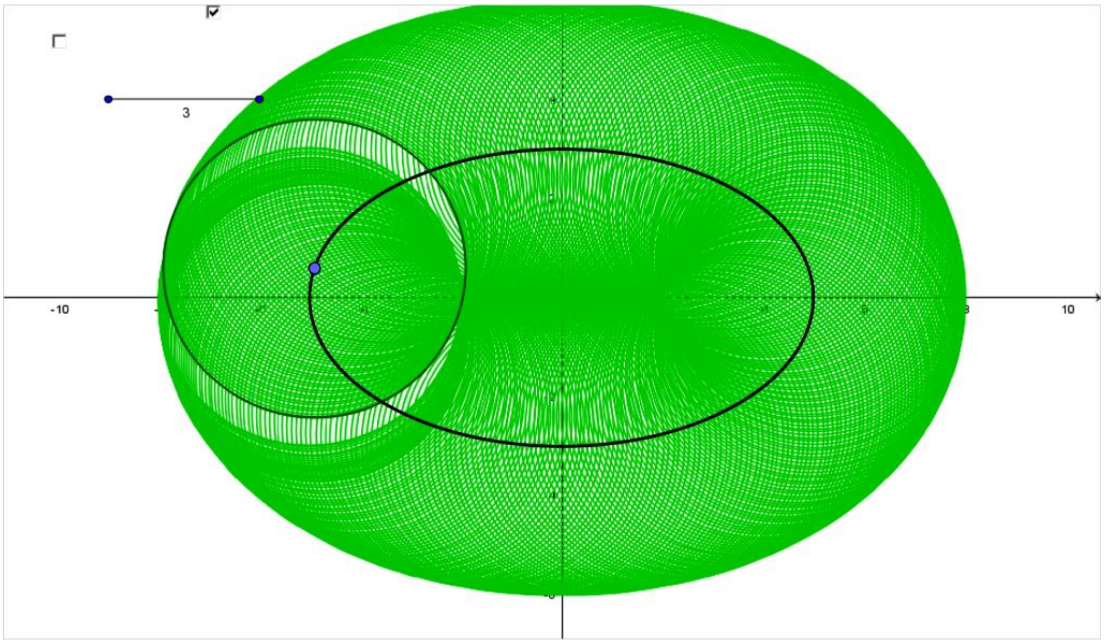
Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε μια λίστα ενδεικτικών προβλημάτων με κοινό χαρακτηριστικό το ότι η πειραματική χρήση του υπολογιστή τα κάνει πλουσιότερα στο επίπεδο των μαθηματικών του σημερινού Λυκείου. Τα προβλήματα αυτά δεν μπορεί να είναι στοιχειώδη. Τονίζουμε ότι δεν βιντεοσκοπούμε αποδείξεις με τον υπολογιστή αλλά ο υπολογιστής είναι ένα μαθηματικό εργαλείο συλλογής πληροφοριών και εικασιών οι οποίες μπορεί να αξιοποιηθούν σε μια δεδομένη χρονική στιγμή.

Μέχρι σήμερα τα λογισμικά που χρησιμοποιήσαμε στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση και κατά κύριο λόγο τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας, δεν έδιναν πληροφορίες ή χρειαζόταν μια κάποια εξειδικευμένη επιτήδευση ώστε κάποιος να εικάσει έναν ισχυρισμό. Αυτός είναι και ένας λόγος που το σύνολο των μαθητών δεν τα χρησιμοποίησε για να βελτιώσει τις επιδόσεις του. Χρησιμοποιήθηκαν μόνο για την σχεδίαση και ίσως για την απεικόνιση της μορφής ενός γεωμετρικού τόπου. Τον κύριο ρόλο έπαιζε ο καθηγητής ο οποίος καθοδηγούσε τον μαθητή σε προκαθορισμένες εικασίες και παρατηρήσεις εκ των προτέρων σχεδιασμένες από τον ίδιο.

Δεν κρίνουμε ότι είναι εδώ απαραίτητο να παρουσιάσουμε αναλυτικά την διαπραγμάτευση των παραδειγμάτων με τα λογισμικά που προαναφέραμε. Μία πληρέστερη εικόνα δίνουμε στο Λυγάτσικας (2013). Όπου όμως υπάρχει αντίστοιχη διαπραγμάτευση στην βιβλιογραφία, θα το αναφέρουμε.

Παράδειγμα Ι. Αναγνώριση καμπύλης: *Σαν πρώτο παράδειγμα θα ζητήσουμε τον προσδιορισμό της ταυτότητας μιας καμπύλης του Breton & Paul, (1864).*

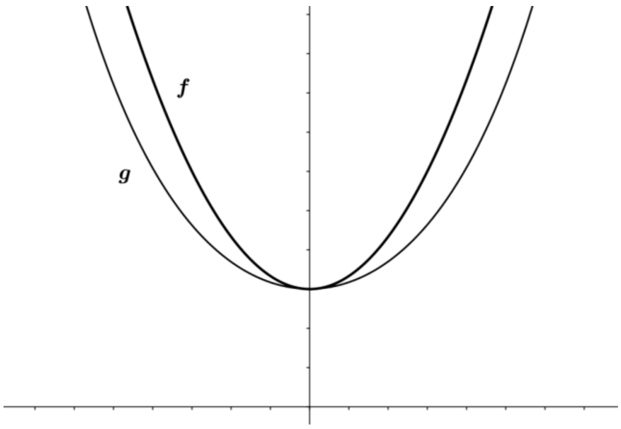


Σχήμα 1. Η καμπύλη του Paul Emile & Breton de Champ

Δίνεται κύκλος ακτίνας 3μ, το κέντρο του οποίου βρίσκεται πάνω σε μια έλλειψη. Ας υποθέσουμε ότι ο μεγάλος της άξονας της έλλειψης είναι 10μ και ο μικρός 6μ. Η καμπύλη του περιγράμματος του κύκλου όταν το κέντρο διατρέχει την έλλειψη είναι η ίδια μια έλλειψη;

Παράδειγμα ΙΙ. Αναγνώριση καμπύλης:

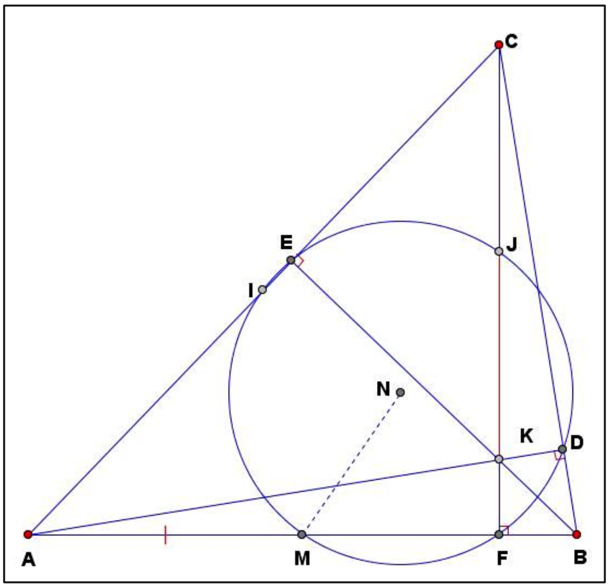
Στο Σχήμα 2 βλέπετε τα γραφήματα δύο καμπυλών εκ των οποίων η μια είναι παραβολή. Μπορείτε να την αναγνωρίσετε; (Λυγάτσικας, 2013, πρόβλημα 22, σελ. 146-153).



Σχήμα 2. Αναγνώριση καμπύλης

Παράδειγμα ΙΙΙ. Νέα θεωρήματα και ιδιότητες στην Γεωμετρία και Άλγεβρα:

Taylor-Euler: *Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ με σταθερή βάση ΒΓ και κορυφή τυχαίο σημείο του επιπέδου. Έστω ρ_E η ακτίνα του κύκλου του Euler και ρ_T η ακτίνα του κύκλου του Taylor στο τρίγωνο ΑΒΓ. Να συγρίνετε τις δύο ακτίνες ρ_E και ρ_T σχετικά με τη θέση της κορυφής Α.* (Λυγάτσικας, 2008b, σελίδες 20 – 24).



Σχήμα 3. Taylor-Euler

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Wu ή της βάσης του Groebner, μπορείτε να βρείτε νέα θεωρήματα στην γεωμετρία χωρίς αναγκαστικά να γνωρίζετε τις μαθηματικές αυτές μεθόδους. Στο Chou (1988), για παράδειγμα, στην σελίδα 104 τα παραδείγματα 9/10/11 είναι νέες σχέσεις που βρέθηκαν μελετώντας το θεώρημα του Pascal.

Μπορούμε όμως να ανακαλύπτουμε και ιδιότητες γεωμετρικών αντικειμένων με το πλέον χαρακτηριστικό σύστημα του είδους, το GEX[11]. Το σύστημα στην σημερινή του έκδοση χρησιμοποιεί τέσσερα (4) είδη αποδεικτικών μεθόδων, μια από τις οποίες είναι και η κλασική συμπερασματική αποδεικτική μέθοδος της γεωμετρίας. Ας πάρουμε για παράδειγμα τον κύκλο των εννέα (9) σημείων. Σχεδιάζοντας το σχήμα στο περιβάλλον του λογισμικού, θα δούμε ότι δημιουργείται μια βιβλιοθήκη με ιδιότητες που δημιουργεί το ίδιο λογισμικό. Οι ιδιότητες αυτές αυξάνουν τον αριθμό με την χρήση.

Έτσι, π.χ. θα δούμε μεταξύ των 380 ιδιοτήτων, μερικές είναι προφανείς αλλά το λογισμικό δεν τις εκτιμά σαν τέτοιες, την καθετότητα των NM και DE, την ισότητα των ζευγών των τριγώνων (CJI,DJI) και (AMI, DMI) κ.λπ. Κάθε φορά που εικάζουμε μια ιδιότητα και την απεικονίζουμε στα σχήμα, η βιβλιοθήκη αυξάνει το περιεχόμενό της με τρόπο θεαματικό φτάνοντας για παράδειγμα σε 620 ιδιότητες αν απλά τμήσουμε ένα από τα τρία ύψη με τον περιγεγραμμένο στο τρίγωνο κύκλο.

Αν και το λογισμικό δίνει τις αποδείξεις σε όλες τις ιδιότητες που περιλαμβάνει η βιβλιοθήκη, μπορούμε να εικάσουμε δυσκολότερους συλλογισμούς που ενδεχομένως να χρειάζονται την πιστοποίηση ορθότητας από τις υπόλοιπες αποδεικτικές μεθόδους του λογισμικού.

Η χρήση των λογισμικών των αυτομάτων αποδείξεων δείχνει ότι κατά κάποιον «*αισιόδοξο τρόπο*» όλο και περισσότεροι μπορούν να κάνουν γεωμετρία χωρίς να είναι αναγκαίο να αποδεικνύουν[12]!

Παράδειγμα IV. Πρόβλημα Kahan:

Το πρόβλημα Kahan (1975) *ζητάει να βρούμε την συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων a, b, c και d, ώστε η έλλειψη*

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{(y-d)^2}{b^2}=1$$

να βρεθεί στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, δες Lazard (1988).

Παράδειγμα V. Αλγόριθμοι και Προγραμματισμός:

Η κατασκευή αλγορίθμων είναι μια δραστηριότητα πολύ πρίν την ανάπτυξη των υπολογιστών. Δεν είναι σε αντίθεση με την αποδεικτική διαδικασία. Αντίθετα εμπλουτίζει πολλούς μαθηματικούς κλάδους με νέα προβλήματα και νέες προσεγγίσεις για την επίλυσή τους.

Ας δούμε ένα πρόβλημα που σχετίζεται με την δομή των ακεραίων ριζών της εξίσωσης Pell-Fermat $x^2 - d\, y^2 = 1$, όπου $d \in \mathbb{N}$, και όχι τέλειο τετράγωνο.

Εξίσωση Pell-Fermat: *Έστω η παραβολή $x^2 - 3\, y^2 = 1$. Δείξτε ότι αν Μ και Ν δύο σημεία της υπερβολής με ακέραιες συντεταγμένες, τότε η τομή της παραλλήλου που άγεται από την*

[11] Για ένα πλήρες παράδειγμα, δες Λυγάτσικας. (2013), σελίδα 265, παράγραφος 6.3.

[12] Είναι λόγια του Keith Delvin, δες Horgan (1993).

κορυφή της προς την ΜΝ τέμνει την υπερβολή σε ένα σημείο με ακέραιες επίσης συντεταγμένες. Γνωρίζοντας τις τρείς πρώτες ακέραιες ρίζες (1,0), (2,1), (7,4) κατασκευάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα δίνει τις ακέραιες ρίζες της εξίσωσης.

Μπορεί κάποιος να αρχίσει την κατασκευή με το υπάρχον Geogebra. Το λογισμικό της δυναμικής γεωμετρίας είναι πολύ καλό στο να υπολογίζει σημεία τομής καμπυλών σε πολύ απομακρυσμένες περιοχές. Κατασκευάζοντας έναν στοιχειώδη αλγόριθμο σε οποιοδήποτε σύστημα αλγεβρικών υπολογισμών, πχ Mathematica, μπορείτε να υπολογίζετε οποιαδήποτε τάξης ρίζα της εξίσωσης Pell-Fermat. Εύλογα θα οδηγηθούμε στην γενίκευση της μεθόδου, η οποία έχει ουσιαστικό μαθηματικό ενδιαφέρον.

Παράδειγμα VI. Το πρόβλημα της Μεγίστης Περιμέτρου: (Λυγάτσικας, 2006, σελ. 317-330)

Αν (O,R) ένας κύκλος με ένα εγγεγραμμένο ν-γωνο. Έστω $α_1,…,α_ν$ οι επίκεντρες γωνίες που βλέπουν τις πλευρές του ω-γώνου. Αν Π η περίμετρος του, τότεαποδεικνλυεται ότι

$$\Pi \leq 2R\left[(\nu-1)\eta\mu\left(\frac{1}{\nu-1}\left[\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\nu-1}}{2}\right]\right)+\eta\mu\left(\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{\nu-1}}{2}\right)\right]$$

Αν x= $α_1+…+α_{ν-1}$ η παραπάνω ανίσωση γίνεται:

$$\Pi \leq 2R\left[(\nu-1)\eta\mu\left(\frac{x}{2(\nu-1)}\right)+\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

Για τις διάφορες τιμές του ν βρείτε την μεγίστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση

$$f_\nu(x)=(\nu-1)\eta\mu\left(\frac{x}{2(\nu-1)}\right)+\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$$

Τι συμπεραίνετε για το είδος του εγγεγραμμένου στο κύκλο ν-γώνου με την μεγαλύτερη περίμετρο;

Παράδειγμα VII. Κατανόηση δύσκολων εννοιών που απαιτούν επίμονους υπολογισμούς:

Με τα μαθηματικά του Λυκείου είναι αδύνατο να υπολογίσουμε το όριο ενός αθροίσματος Riemann. Αντίθετα, με ένα σύστημα συμβολικού υπολογισμού αυτό είναι δυνατόν. Για παράδειγμα, το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

μπορεί να υπολογισθεί απ' ευθείας σαν όριο του αθροίσματος Riemann. Το Maple δίνει:

```
> x := i -> a + ((b - a)/n)·i;
```

$$x := i \rightarrow a + \frac{(b-a)\,i}{n}$$

```
>
> ξ := i -> (1/2)·(x(i - 1) + x(i));
```

$$\xi := i \rightarrow \frac{1}{2}\,x(i-1) + \frac{1}{2}\,x(i)$$

```
> a := 0 : b := 1 :
> f := x -> 1/sqrt(1 + x^2);
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

```
> simplify(f(ξ(i)));
```

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{4\,n^2 + 4\,i^2 - 4\,i + 1}{n^2}}}$$

```
> lim_(n→∞) ( Σ_(i=1)^n ((b - a)/n)·simplify(f(ξ(i))) );
```

$$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

```
> int(f(x), x = a..b, 'AllSolutions');
```

$$-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

```
>
```

Παράδειγμα VIII. Κατασκευές στις κωνικές:

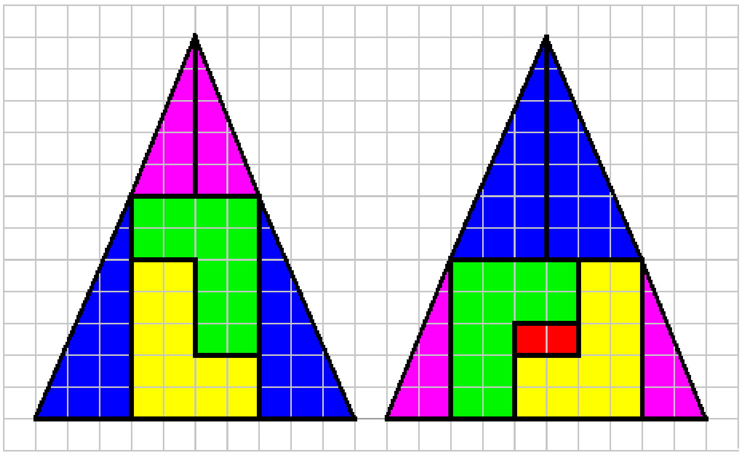
Με την εισαγωγή των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας, ιδίως με το Cabri, μια σειρά δύσκολων κατασκευών στις κωνικές πραγματοποιήθηκαν με αποτέλεσμα να έχουμε μια σειρά νέων εφαρμογών στον τομές της γεωμετρίας, (Λυγάτσικας, 2013). Για παράδειγμα:

Κατασκευή σημείων κωνικών, κατασκευή κωνικών όταν δίνονται χαρακτηριστικά τους σημεία, η μελέτη της συμπεριφοράς των ριζών πολυωνυμικής εξίσωσης 3^{ου} βαθμού σε σχέση με τις ρίζες της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου κ.λπ.

Παράδειγμα IX. Οπτικά παράδοξα

Είναι γνωστά τα φαινόμενα πλάνης της διαμέρισης ευθ. σχημάτων. Είναι χαρακτηριστικό ότι μπορούν να διερευνηθούν με απλά συστήματα δυναμικής γεωμετρίας. Για παράδειγμα:

Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση στο Σχήμα 4 για την ύπαρξη του κόκκινου ορθογωνίου στο κέντρο του δευτέρου σχήματος; Τα σχήματα με το ίδιο χρώμα στις δύο διαμερίσεις είναι ίσα.



Σχήμα 4. Οπτικά παράδοξα

Παράδειγμα X. Προβλήματα: Μια πλούσια συλλογή του είδους είναι στο site του Austrian Center for Didactics of Computer Algebra, δείτε ACDCA.

Θα δώσουμε εδώ ένα παράδειγμα που περιγράφει ο καθηγητής Josef Bohm:

Να περιγραφεί η ανάπτυξη ενός πληθυσμού (αρχική τιμή = 1000), όπου οι γεννήσεις και οι θάνατοι αλλάζουν γραμμικά με τον χρόνο. Και τα δύο ποσοστά μειώνονται σταθερά μέσα σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα από την αρχική σε μια τελική χρονική στιγμή.

Παράδειγμα XI. Καθαρά Μαθηματικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων:

Ας φύγουμε λίγο από την κλασική πίστα των μαθηματικών προβλημάτων για να δούμε τι γίνεται στον τομέα των εφαρμογών των καθαρών μαθηματικών και ιδιαίτερα στην Θεωρία πιθανοτήτων.

Ιστορικά, τα πρώτα προβλήματα πιθανοτήτων επιλύθηκαν με απλή απαρίθμηση ή χρήση άλλων συνδυαστικών εργαλείων. Σήμερα όμως έχουμε μια μεγάλη ποικιλία από συνθετότερα εργαλεία, την συνδυαστική, την ανάλυση, την άλγεβρα και την γεωμετρία, για να λύσουμε πολυπλοκότερα και πολυδιάστατα προβλήματα. Οι πίνακες κατανομών καθώς και οι υπολογιστές έχουν μειώσει το χάσμα μεταξύ κατανόησης του προβλήματος και την τεχνική επάρκεια για την επίλυσή του. Για παράδειγμα σε προβλήματα όπου χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε την γεωμετρική πιθανότητα, μοντέλα που μπορεί να προσομοιάσουν την μέθοδο Monte Carlo[13] είναι πολύ χρήσιμα. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Πρόβλημα: *Σ’ ένα τετράγωνο πλευράς 1 (Σχήμα 5) ρίχνουμε σφαιρίδια (ελαχίστης ακτίνας) των οποίων σημειώνουμε τη θέση με τις συντεταγμένες (x,y). Το ερώτημα είναι το εξής: Πόσα από αυτά τα σφαιρίδια ικανοποιούν την σχέση*

$$x^2 + y^2 < 1\ ;$$

[13] Επίσης, μπορείτε να δείτε την προσομοίωση της μεθόδου στον υπολογιαμό του εμβαδού ενός επιπέδου χωρίου στην ιστοσελίδα του συμβούλου Δημήτρη Ζαχαριάδη: http://blogs.sch.gr/dimzachari/.

Σχήμα 5.

Επίσης, ας σημειώσουμε εδώ ότι διαθέτουμε σήμερα ισχυρότατους προσομοιωτές του τυχαίου, όπως για παράδειγμα ο προσομοιωτής του School of Computer Science and Statistics στο Trinity College του Δουβλίνου που κατασκευάστηκε το 1998, και σήμερα ανήκει στην εταιρεία Randomness and Integrity Services Ltd. Η ηλεκτρονική του διεύθυνση είναι: http://www.random.org/

Συμπεράσματα

Η σχέση των μαθηματικών με τους υπολογιστές είναι βαθύτερη και ουσιαστικότερη πέρα από κάθε άλλο γνωστικό αντικείμενο στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Wolfram, 2010). Η εισαγωγή της τεχνολογίας στην βασική εκπαίδευση, που στην Ελλάδα πραγματοποιήθηκε θα λέγαμε αργά, ήταν μοιραίο να ακολουθήσει κάποια βήματα εισαγωγής. Ήδη βρισκόμαστε στο πρώτο βήμα όπου οι καθηγητές χρησιμοποιούν τον υπολογιστή σαν βοηθητικό εργαλείο στο διδακτικό τους έργο. Είμαστε ακόμα στο στάδιο όπου η τεχνολογία έρχεται να βελτιώσει το υπάρχον Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών. Η αξιολόγηση όμως της όλης προσπάθειας δεν μας αφήνει περιθώρια να ελπίζουμε ότι όλα βαίνουν καλώς. Τα σχολεία διεθνώς δείχνουν μια απίστευτη ανθεκτικότητα στις αλλαγές.

Σε έναν κόσμο γεμάτο τεχνολογικά επιτεύγματα είναι πολύ εύκολο να χαθεί κανείς. Γι΄ αυτό πρέπει συνεχώς να αξιολογούμε, να ρωτάμε και να επαναπροσδιορίζουμε τον στόχο. Στον τομέα της εκπαίδευσης δεν έχουμε κάνει αρκετά ώστε να εξετάσουμε τα μέχρι στιγμής μοντέλα εκπαιδευτικής πρακτικής και τον τρόπο που δημιουργούν το βέλτιστο περιβάλλον επιδόσεων.

Η πολυμορφία της μαθηματικής επιστήμης, είτε με την στενή σημασία σαν επιστήμη που βασίζεται αποκλειστικά στην αποδεικτική διαδικασία ξεκινώντας από στοιχειώδεις προτάσεις, είτε με μια ευρύτερη σημασία σαν καθαρά και εφαρμοσμένα μαθηματικά, έχει επηρεάσει και αυτό είναι θετικό και την εκπαιδευτική διαδικασία. Το πρώτο βήμα έγινε, ο υπολογιστής σαν εργαλείο βοήθειας στην διδακτική πρακτική που ακολουθούσαμε έχει δώσει ότι είχε να δώσει. Σήμερα μπορεί να γίνει μια δραστικότερη επιλογή. Η πληροφορική επιστήμη μπορεί να παρέχει μια αυθεντική πράξη μαθηματικής διερεύνησης, ανακάλυψης και αφαίρεσης και μάλιστα μια αυθεντική προ-αποδεικτική διαδικασία.

Στο ερώτημα, που ενδεχομένως να γεννά ο τίτλος, αν είναι αναγκαίο να επανεξετάσουμε την σχέση μαθηματικών και τεχνολογίας, η απάντηση είναι καταφατική και μάλιστα η αναθεώρηση της σχέσης αυτής είναι μονόδρομος. Η νέα εποχή μέσα από τον πλούτο της γνώσης, παρέχει ένα πλεόνασμα προβλημάτων, που με την πειραματική διάσταση και την αυτοματοποίηση αποδείξεων, μπορεί να τύχουν μιας εξ ίσου αυστηρής ανάλυσης (με την μαθηματική σημασία της λέξης) έτσι ώστε η υιοθέτηση τους από την μαθηματική εκπαίδευση να είναι ουσιαστική. Αυτό όμως απαιτεί ξεκάθαρους εκπαιδευτικούς στόχους και προπάντων μια ακαδημαϊκή κοινότητα που θα μπορεί να προτείνει λύσεις και να ζητά νέες για να προχωρήσει.

Αναφορές

ACDCA Austrian Center for Didactics of Computer Algebra: http://www.acdca.ac.at

Atiyah, M. et. al.: (1994). *Responses to "Theoretical Mathematics"*, Bull. Amer.Math. Soc. 30, 178 – 207.

Avigad, J.: (2008), *Computers in mathematical inquiry*, in P. Mancosu (ed.), The Philosophy of Mathematical Practice, Oxford University Press, Oxford etc., chapter 11, pp. 302–316.

Bailey D. H., Borwein J.M., Kapoor V. and Weisstein E. W. : (2006), *Ten Problems in Experimental Mathematics,* The American Mathematical Monthly Vol. 113, No. 6 (Jun. - Jul., 2006), pp. 481-509 Article Stable URL:http://www.jstor.org/stable/27641975

Bailey, D. H., Borwein, J. M. and Girgensohn, R. (1994), *Experimental evaluation of Euler sums*, Experimental Mathematics 3(1), 17–30.

Borwein, J. and Bailey, D.: (2004), *Mathematics by Experiment:* Plausible Reasoning in the 21st Century, A K Peters, Natick (MA).

Borwein, J. and Bailey, D.: (2005), *Experimental Mathematics: Examples, Methods and Implications*, NOTICES OF THE AMS. VOLUME 52 number 2.

Borwein, J., Borwein, P., Girgensohn, R. and Parnes, S. (1996), Making sense of experimental mathematics, The mathematical intelligencer 18(4), 12–18.

Breton de Champ, Paul Emile (1864) *Description Des Courbes A Plusieurs Centres D'Apres Le Procede De Perronet* (1846) (French Edition), Kessinger Publishing, LLC (September 10, 2010)

Buchberger, B. (1992). *Teaching Math by Software.* Paper of the RISC Institute (Research Institute for Symbolic Computation); University of Linz.

Buchberger, B. (2002). (Research Institute for Symbolic Computation, University of Linz,Austria): *Logic, Mathematics, Computer Science: Interactions*, Talk at LMCS 2002. Castle of Hagenberg, October 2002.

Burnside, William (1911). *Theory of groups of finite order,* New York: Dover Publications.

Center for American Progress (2013). *Are Schools Getting a Big Enough Bang for Their Education Technology Buck?* from http://www.americanprogress.org/

Chaitin, G. J. (1994). Randomness & Complexity in Pure Mathematics. International Journal of Bifurcation and Chaos, 4, 3-15.

Chou S.-C. (1988). *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel publishing company-Dordecht.

Christensen C. M.(1997) "*The Innovator's Dilemma*". Boston, Massachusetts, USA: Harvard Business School Pres.

Cox D., Little J., O'Shea D. (1991). *Ideals, Varieties and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

Delvin K. (2010). What *is Experimental Mathematics?* in The Best writing on Mathematics Ed. Mircea Pitici, pp. 32-36.

Ekhad, S. B. and Zeilberger, D.: (1996), The number of solutions of X2 = 0 in triangular matrices over GF(q), Electronic Journal of Combinatorics 3(R2), 1–2.

Feit, W.; Thompson, John G., (1962). *"A solvability criterion for finite groups and some consequences",* Proc. Nat. Acad. Sci. *48 (6)*.

Feit, W.; Thompson, John G., (1963). *"Solvability of groups of odd order", Pacific* Journal of Mathematics 13: 775–1029.
Gonthier, G. (2008). Formal Proof – The Four Color Theorem http://www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf
Hales Thomas (2008). Formal Proof from http://www.ams.org/notices/200811/tx081101370p.pdf
Harrison J. (2008). *Formal Proof* – Theory and Practice στο http://www.ams.org/notices/200811/tx081101395p.pdf
Horgan, J. (1993). *The Death of Proof,* Scientific American Oct. 1993, pp. 93.
Kahan W., (1975) : "*Problem = 9: an Ellipse Problem*", SIGSAM Bulletin of the Assoc. Comp. Math., vol. 9, p.11.
Kutzler B. (1994). DERIVE *The future of Teaching, Mathematics*, The International DERIVE Journal, vol. 1, no 1.
Laborde Jean-Marie (1997) . *Exploring non-euclidean geometry in a dynamic geometry environment like Cabri-geometre*. In James King and Doris Schattschneider, editors, Geometry Turned On, volume 41 of MAA Notes, pages 185–192. MAA, 1997.
Lazard D. (1988). *Quantifier Elimination Optimal Solution for two Classical Examples*, Algorithms in Real Algebraic Geometry, Academic Press, p. 261-266.
Perelman G. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.* ArXiv : math.DG/0211159.
Perelman G.: *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds.* ArXiv : math.DG/0307245.
Perelman G.: *Ricci flow with surgery on three-manifolds.* ArXiv : math.DG/0303109.
Tarski A. (1951). *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, Second Edition, Berkeley and Los Angeles.
Taylor R., Wiles A. (1995). *"Ring theoretic properties of certain Hecke algebras"*. Annals of Mathematics 141 (3): 553–572.
Wiedijk Freek (2008). *Formal Proof Started* from http://www.ams.org/notices/200811/tx081101408p.pdf
Wiles, A. (1995). *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*. Annals of Mathematics 141 (3): 443–551.
Wolfram C. (2010). *Διδασκαλία πραγματικών μαθηματικών με υπολογιστές σε παιδιά*, από http://www.ted.com/talks/lang/el/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers.html
Wu Wen-tsun (1994). *Mechanical Theorem Proving in Geometries,* Springer Verlag, Texts and Monographs.
Λυγάτσικας Ζ. (2006). *Αυτόματες αποδείξεις με συστήματα Συμβολικού Υπολογισμού και Δυναμικής Γεωμετρίας,* 23ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Εταιρείας, Πάτρα, 24, 25 και 26 Νοεμβρίου 2006.
Λυγάτσικας Ζ. (2008a). *Μαθηματικά με το Chinese Geometry Exp*: Διημερίδα Μαθηματικών Βαρβακείου Σχολής 31 Οκτ. και 01 Νοεμ. 2008 Ψυχικό.
Λυγάτσικας Ζ. (2008b). *Αυτόματες Αποδείξεις στην Γεωμετρία με την Μέθοδο Wu*, 2008, προσχέδιο στο http://blogs.sch.gr/zenonlig/sc-d/
Λυγάτσικας Ζ. (2010). Η επίδραση της τεχνολογίας σε διάφορους ρόλους των μαθηματικών: Ημερίδα «Καινοτομίες και κριτική σκέψη: Αναζητώντας πρακτικές για τη σχολική τάξη» Ελληνοαμερικανικό Κολλέγιο Αθηνών, 27-02-2010.
Λυγάτσικας Ζ. (2013). *Κωνικές στην Ευκλείδεια Γεωμετρία*, εκδ. Liberal Books, Αθήνα.