Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών– Επιστημονικών Θεμάτων, Τεύχος 8ο, 101-117, 2016

Η έννοια του αναλλοίωτου ως μαθηματική, μαντική και διασκεδαστική έννοια

Αλέξιος Μαστρογιάννης
alexmastr@sch.gr

Σχολικός Σύμβουλος Π. Ε.

Περίληψη. Η έννοια του αναλλοίωτου διατρέχει, υποστηρίζει και αποκωδικοποιεί πολλά κεφάλαια και τομείς των Μαθηματικών. Η σύζευξη μεταβολής και αναλλοίωτου αποτελεί μια θεμελιώδη, ταξινομική σταθερά για τον εντοπισμό και την ανακάλυψη των ιδιοτήτων και των σχέσεων των μαθηματικών αντικειμένων. Στη Γεωμετρία, για παράδειγμα, η μελέτη των σταθερών - αναλλοίωτων ιδιοτήτων των σχημάτων, κάτω από τη δράση μιας ομάδας μετασχηματισμών, είναι το μοναδικό κριτήριο για την κατηγοριοποίησή της και τον ακριβή καθορισμό άλλου τύπου και μορφής Γεωμετριών. Η παρούσα εργασία, με σκοπό την αποκρυπτογράφηση των σταθερών μυστικών των Μαθηματικών αλλά και την παιδαγωγική τους αξιοποίηση ακόμη και στο Δημοτικό Σχολείο, παρουσιάζει ένα κλιμακωτό απάνθισμα κυρίως αλγεβρικών και αριθμητικών σταθερών και αναλλοίωτων, αρχομένων από την ανθρώπινη ικανότητα για μέτρηση έως την θεωρία πιθανοτήτων, τις αριθμητικές προόδους και τη διερεύνηση του απείρου. Τέλος, με στόχο την πρόσδοση μιας διασκεδαστικής νότας στο καθημερινό μάθημα, καθώς και την ανάδειξη της σημαντικότητας των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή, αποκαλύπτονται κάποιες μαντικές σταθερές αλλά και αμετάβλητα μυστικά για επιτυχημένες προβλέψεις αριθμητικών αποτελεσμάτων. Επίσης, παρουσιάζονται αρκετές αναλλοίωτες μέθοδοι, τακτικές και στρατηγικές, οι οποίες εξασφαλίζουν σταθερή, κερδοφόρα έκβαση σε αριθμητικά αλλά και μαθηματικής λογικής παιχνίδια.

Λέξεις κλειδιά: Αναλλοίωτο**,** μεταβολή**,** Μαθηματικά, μετασχηματισμός**,** παιχνίδι.

Εισαγωγή - Η έννοια του αναλλοίωτου στα Μαθηματικά

Σύμφωνα με το λεξικό του Μπαμπινιώτη (2005), αναλλοίωτος είναι αυτός που δεν έχει υποστεί αλλοίωση, ο άφθαρτος, ο άθικτος. Στην Πύλη της ελληνικής γλώσσας (www.greek-language.gr), και στην ερμηνεία του σχετικού λήμματος, αναφέρεται ότι αναλλοίωτος είναι αυτός που δεν έχει αλλοιωθεί, που δεν έχει αλλάξει, που δεν έχει μεταβάλει, συνήθως με την πάροδο του χρόνου, τη φύση του ή τα χαρακτηριστικά του προς το χειρότερο, ο αμετάβλητος. Ετυμολογικά η λέξη προέρχεται από: <α στερητικό + αλλοιόω = καθιστώ κάτι αλλοίον (διάφορον), μεταβάλλω, αλλοιώνω> (Σταματάκος, 1999; Μπαμπινιώτης, 2005).

Στα Μαθηματικά, αναλλοίωτη (invariant) θεωρείται μια ποσότητα, ένα αντικείμενο, μια σχέση ή μια ιδιότητα, η οποία, σε αντίθεση με κάποιες άλλες μεταβλητές, δε μεταβάλλεται και παραμένει ανεπηρέαστη από μια συγκεκριμένη μαθηματική λειτουργία-πράξη, όπως για παράδειγμα έναν μετασχηματισμό. Η τροποποίηση διάφορων πτυχών ενός φαινομένου αποκαλύπτει το αμετάβλητο-αναλλοίωτο της δομής όλου του φαινομένου. Έτσι οι αναλλοίωτες είναι κρίσιμα χαρακτηριστικά, που προσδιορίζουν ή γενικεύουν ένα φαινόμενο (Leung, 2012b).

Φυσικά, κάθε μεταβολή δημιουργεί αλλαγές, αλλά και εισάγει αναλλοίωτες (Sinitsky & Ilany, 2009). Έτσι, οι δύο έννοιες της μεταβλητής και του αναλλοίωτου είναι άρρηκτα συνδεδεμένες, αφού το αναλλοίωτο υφίσταται και ανιχνεύεται, μόνο όταν υπάρχει μεταβολή (Mason, 2007).

Η έννοια των αναλλοίωτων είναι πολύ σημαντική και πανταχού παρούσα στα Μαθηματικά και τον μαθηματικό συλλογισμό (Behr & Harel, 1990), επειδή αντικατοπτρίζει τις εσωτερικές ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων και συμβάλλει έτσι στην ταξινόμησή τους. Ο προσδιορισμός των σταθερών μπορεί να αποτελέσει ένα πολύ ισχυρό εργαλείο, επειδή επιτρέπει να εντοπιστούν οι κοινές ιδιότητες σχημάτων και γεγονότων, τα οποία, με μια πρώτη ματιά, φαίνονται πολύ διαφορετικά μεταξύ τους (Education Development Center, 2002). Οι ερωτήσεις, που εγείρονται κατά τις μεταβολές και αναμένουν απαντήσεις, σχετίζονται με το «τι αλλάζει», «τι μένει σταθερό» και «ποιος είναι ο βασικός κανόνας» (Leung, 2012a). Αυτές οι ερωτήσεις δε, ως μια καίρια μεταγνωστική διαδικασία, φαίνονται να είναι πολύ αποτελεσματικές σε δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων (στο Sinitsky & Ilany, 2009).

Υποστηρίζεται ότι τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη των προτύπων-μοτίβων (Resnick, 1997) και για αυτό τον λόγο η διδασκαλία τους εντάχθηκε, ήδη από την προηγούμενη δεκαετία, στα Προγράμματα Σπουδών σε πολλές χώρες, της Ελλάδας συμπεριλαμβανομένης (Τσικοπούλου, 2007). Γενικά, μπορεί να επισημανθεί ότι οι μαθηματικές διερευνήσεις περιλαμβάνουν κατά κόρον αναζήτηση μοτίβων και δομών (Education Development Center, 2002).

Η έννοια του μοτίβου-προτύπου (pattern), που βοηθά τους μαθητές στην ανακάλυψη σταθερών μαθηματικών σχέσεων με ένα παιγνιώδη τρόπο, προσιτό στα παιδιά (Τύπας & Ντάφου, 2006), αποτελεί σημαντικό, μαθηματικό εργαλείο και κυριαρχεί στα νέα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών. Τα μαθηματικά μοτίβα μπορεί να ιδωθούν και να ερμηνευθούν ως αμετάβλητες-αναλλοίωτες δομές, που αφορούν σε αριθμούς ή/και σχήματα, οι οποίες εμφανίζονται όταν η μελετώμενη αριθμητική/γεωμετρική κατασκευή ή φαινόμενο υφίσταται αλλαγή ή μεταβολή (Leung, 2010; Leung, 2012a). Βέβαια, και τα θεωρούμενα, σήμερα, αξιόπιστα τεστ νοημοσύνης (π.χ. της Mensa) στηρίζονται αποκλειστικά στην ανακάλυψη εικονογραφημένων προτύπων, μέσω σχηματικών παραστάσεων (figure Reasoning Test), ώστε να μην αποτελεί πρόβλημα συμμετοχής (και να μην επηρεάζει τον δείκτη του I.Q.) η άγνοια γραφής και ανάγνωσης αλλά και η απουσία ακαδημαϊκών γνώσεων.

Πολλές μελέτες και έρευνες συνηγορούν υπέρ των μαθησιακών οφελών που προσφέρουν τα μοτίβα, αφού μέσα από την παρατήρησή τους παρέχουν άριστες ευκαιρίες μάθησης, ειδικά στους μικρούς μαθητές (Wittmann, 2005). Μάλιστα, ακόμα και παιδιά ηλικίας 4-5 ετών μπορούν να αντιληφθούν τις κανονικότητες και σταθερές που καθορίζονται σε ένα απλό pattern (Κυλάφης & Βαμβακούση, 2009), αν και κάποιες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν γενικά οι μαθητές κατά την παρατήρηση αμετάβλητων ιδιοτήτων δεν παραβλέπονται (Clark-Wilson, 2013; Zorin, 2011; Rollick, 2009). Μια «καλή» διδασκαλία πρέπει να προσφέρει στοχευμένους διαύλους, ώστε οι μαθητές με την παρατήρηση σταθερών, εν μέσω πειραματισμών και ελέγχων, να ανακαλύπτουν κρυμμένες αρχές και κανόνες.

Τονίζεται, μάλιστα, ότι η επίγνωση και η συνειδητοποίηση κάποιων σταθερών στη φύση και τη ζωή αποτελεί την εγγύηση και την απαρχή της αφηρημένης σκέψης και των νοηματοδοτημένων δράσεων (Wilhelm, 1973, όπως παρατίθεται από τον Leung, 2012a). Αναντίλεκτα, η θήρευση σταθερών και αναλλοίωτων υφίσταται ως διαιώνιος και διηνεκής ανθρώπινος στόχος. Από τα πρώτα του νοητικά σκιρτήματα, ο άνθρωπος, παρακολουθώντας διάφορα φυσικά, επαναλαμβανόμενα φαινόμενα και μοτίβα, όπως η εναλλαγή μέρας και νύχτας, οι φάσεις της σελήνης, η διαδοχή των εποχών, οι εμφανίσεις αστεριών και αστερισμών κ. ά., άρχισε να συνειδητοποιεί την ισχύ και την οικουμενικότητα των απαράβατων νόμων, οι οποίοι καθορίζουν και διέπουν τον κόσμο και το σύμπαν. Τα θεμέλια και οι απαρχές μιας πρώιμης, έστω εμπειρικής, επιστήμης είχαν, ήδη από τότε, σφυρηλατηθεί (Μαστρογιάννης, 2015).

Ειδικά στα Μαθηματικά, η αναζήτηση σταθερών και αναλλοίωτων είναι δυνατόν να αναβαθμιστεί σε ισχυρό παιδαγωγικό μοντέλο, αλλά και να παρομοιαστεί σαν ανεύρεση «σανίδας σωτηρίας στην τρικυμία». Μέσω των διαδικασιών αυτού του μοντέλου μπορεί να επιτευχτεί αποτελεσματικότερη διδασκαλία των Μαθηματικών, καθώς και να αποκτηθεί εποικοδομητικότερα η γνώση τους (Leung, 2012a). Όπως επισημαίνουν οι Ζαχαριάδης κ.ά., (2011), η αναζήτηση κανονικοτήτων (και γενικότερα, αναλλοίωτων χαρακτηριστικών και σχέσεων) βρίσκεται στο κέντρο της μαθηματικής δραστηριότητας. Η εξάσκηση και η καλλιέργεια δεξιοτήτων με γενικές «ικανότητες», όπως μαθηματική σκέψη, εξερεύνηση, επεξήγηση, εικασία, μοντελοποίηση και επικοινωνία μπορεί να αποτελέσει το καλύτερο διαβατήριο για την εισαγωγή των μαθητών στις συναρτήσεις και την Άλγεβρα (Wittmann, 2005; Ζαχαριάδης κ.ά., 2011). Αναμφισβήτητα, η ικανότητα αναγνώρισης μεταβλητών, σταθερών και αναλλοίωτων μπορεί να δημιουργήσει τα κατάλληλα πλαίσια για ανάδειξη της μη-τυπικής αλγεβρικής σκέψης, ακόμα και σε μικρούς μαθητές του Δημοτικού σχολείου (Sinitsky & Ilany, 2009).

Την ύπαρξη τέτοιων κανονικοτήτων και αναλλοίωτων έχει παρατηρηθεί ότι επιχειρούν να εντοπίσουν και εκ γενετής τυφλοί, όταν, για παράδειγμα, προσπαθούν να «εξερευνήσουν» συμμετρικά σχήματα (Healy & Powell, 2013). Έτσι, τα γεωμετρικά αντικείμενα αντιμετωπίζονται ως δυναμικές τροχιές και επιδιώκεται να βρεθούν όλες οι αναλλοίωτες σχέσεις μεταξύ των σημείων εκείνων που καθορίζουν αυτές τις τροχιές.

Η θεωρία των αναλλοίωτων, κλάδου της Αφηρημένης Άλγεβρας, με πρωτεργάτη τον Άγγλο μαθηματικό, φιλόσοφο και λογικολόγο George Boole (1815 -1864), υπήρξε έντονο και ευρύ ερευνητικό πεδίο στη διάρκεια του 19ου αιώνα και στις αρχές του 20ού (Olver, 1999). Αντικείμενο μελέτης της αποτέλεσαν οι πολυωνυμικές εξισώσεις και οι εσωτερικές (intrinsic) ιδιότητές τους, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες μετά από μετασχηματισμούς (Καλογεροπούλου κ.ά., 1992; Kraft & Procesi, 1996). Για παράδειγμα, η μετακίνηση ενός αντικειμένου είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση αναλλοίωτου, καθόσον το μήκος του παραμένει σταθερό, εν μέσω των μεταβολών των συντεταγμένων του. Δε θα πρέπει, ωστόσο, να αγνοηθεί πως οι σύγχρονες επιστημονικές αντιλήψεις θεωρούν ότι η παρουσία βαρυτικών μαζών επηρεάζει την καμπυλότητα του χώρου και συνεπαγωγικά το αναλλοίωτο των σωμάτων, κατά τις μετακινήσεις, δεν είναι προφανές ούτε δεδομένο (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ, 2001).

Η έννοια του αναλλοίωτου, αν και δεν αναφέρθηκε ρητά, εισήχθηκε στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, με τον μεγάλο Έλληνα γεωμέτρη να δέχεται αξιωματικά ότι «τα ίσα σχήματα διατηρούν τις ιδιότητές τους ανεξάρτητα από την τοποθέτησή τους στο επίπεδο» (Π. Ι., 2006; Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ, 2001). Αυτήν την αμεταβλητότητα ο Ευκλείδης την χρησιμοποίησε δις στις αποδείξεις του, όπως στο πρώτο του θεώρημα, υιοθετώντας τη μέθοδο της «υπέρθεσης» (επίθεσης), κατά την οποία δυο τρίγωνα είναι ίσα στην περίπτωση που μετακινηθούν και συμπέσουν επακριβώς (Κωστόπουλος, 2014).

Αναλλοίωτο και μετασχηματισμοί

Μεγάλη ώθηση στην ανάπτυξη της θεωρίας των αναλλοίωτων έδωσαν, τα τελευταία 170 χρόνια, οι εργασίες των πρωτοπόρων Arthur Cayley, David Hilbert, Paul Gordan αλλά και της Emmy Noether, μαθήτριας του τελευταίου αλλά και συνεργάτιδας και προστατευόμενης του Hilbert (Dolgachev, 2003). Η Noether και ο επιβλέπων της διδακτορικής της διατριβής Gordan υπήρξαν μέλη της πανεπιστημιακής κοινότητας του Erlangen, μιας πόλης στη βόρεια Βαυαρία, η οποία είναι συνδεδεμένη στενά με την έννοια του αναλλοίωτου στα Μαθηματικά αλλά και δηλωτική της σπουδαιότητάς της, ειδικά στη Γεωμετρία. Πράγματι, το «πρόγραμμα Erlangen», που παρουσίασε ο Γερμανός μαθηματικός Felix Klein το 1872, υπήρξε καμπή και ιστορική στιγμή για τα Μαθηματικά, επειδή κατηγοριοποίησε τη Γεωμετρία, ορίζοντάς τη ως την εξέταση και τη μελέτη των σταθερών-αναλλοίωτων ιδιοτήτων των σχημάτων, κάτω από τη δράση μιας ομάδας μετασχηματισμών (Furinghetti, et al., 2013).

Ένας μετασχηματισμός Τ, από το σύνολο Α στο Β, είναι μια αμφιμονοσήμαντη και επί συνάρτηση, με τα Α και Β να είναι σύνολα σημείων, όπως για παράδειγμα το επίπεδο ή ο χώρος. Η έννοια του μετασχηματισμού είναι πρωτεύουσα και κρίσιμη στη Γεωμετρία, αφού η ταξινόμηση των διάφορων ειδών της Γεωμετρίας βασίζεται στις γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων, οι οποίες διατηρούνται αναλλοίωτες, εν μέσω μετασχηματισμών. Υπό αυτό το διαφοροποιό πρίσμα, η Γεωμετρία χωρίζεται σε Ευκλείδεια και μη (Lobachevsky, Riemann), σε Ομοπαραλληλική, σε Προβολική κ.λπ. (Μαστρογιάννης, 2008). Αυτές οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες είναι κρίσιμα σημαντικές, καθώς είναι ικανές να στηρίξουν τη Θεωρία της Γενικής και Ειδικής Σχετικότητας του Αϊνστάιν και την καμπυλότητα του σύμπαντος, που αυτή πρεσβεύει.

Η Ομοπαραλληλική Γεωμετρία εξετάζει τις ιδιότητες των σχημάτων, που παραμένουν αναλλοίωτες μετά από παράλληλες προβολές ενός επίπεδου σε κάποιο άλλο, η Προβολική μελετά τις ιδιότητες των σχημάτων, οι οποίες παραμένουν αμετάβλητες, μέσω των λεγόμενων προβολικών μετασχηματισμών, ενώ η Ευκλείδεια Γεωμετρία ασχολείται με τις ιδιότητες των σχημάτων, οι οποίες δεν μεταβάλλονται και παραμένουν σταθερές μετά από μετατοπίσεις (Ηλιάδης, 1992). Για παράδειγμα, οι ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί αφήνουν αναλλοίωτα τη γραμμικότητα των σημείων, την παραλληλία, το σημείο τομής των ευθειών, τον λόγο των μηκών ευθυγράμμων τμημάτων που κείνται σε μια ευθεία, όπως και τον λόγο των εμβαδών δυο τριγώνων, ενώ μεταβάλλουν-αλλοιώνουν τους κύκλους, τις γωνίες και τις αποστάσεις (Μαστρογιάννης, 2008). Οι προβολικοί μετασχηματισμοί διατηρούν τις ευθείες, το σημείο τομής των ευθειών, τη γραμμικότητα αλλά και τον διπλούν λόγο τεσσάρων σημείων, κειμένων επί μιας ευθείας (Ηλιάδης, 1992), ενώ μεταβάλλουν την παραλληλία, τα μήκη και τις αναλογίες των μηκών αλλά και τις γωνίες (Μαστρογιάννης & Τρύπα, 2010). Όσον αφορά στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, οι ομώνυμοι μετασχηματισμοί (παράλληλη μεταφορά, αξονική συμμετρία, ολισθαίνουσα ανάκλαση και περιστροφή) αφήνουν το σχήμα των αντικειμένων αναλλοίωτο (παρά τις σύγχρονες αιτιάσεις, όπως αναφέρθηκε πρωτύτερα), δεδομένου ότι τα μήκη και τα μέτρα των γωνιών παραμένουν σταθερά (Μαστρογιάννης, 2015). Στους ευκλείδειους μετασχηματισμούς, η μεταβολή μπορεί να εντοπισθεί μόνο στην αλλαγή της θέσης και του προσανατολισμού των αντικειμένων.

Η θεωρία αναλλοίωτων, αρχικά, ενδιαφέρθηκε και περιέγραψε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις, που παραμένουν αμετάβλητες στο πλαίσιο κάποιων μετασχηματισμών.

Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η διακρίνουσα μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Έστω, λοιπόν, η δευτεροβάθμια εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$. Η διακρίνουσα $β^2$-4αγ μας πληροφορεί για τον αριθμό των πραγματικών λύσεων (0, 1 ή 2), ενώ παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τη μεταφορά x→x+α (Olver, 1999). Πράγματι, η διακρίνουσα τής $α(x+α)^2+β(x+α)+γ=0$, δηλαδή της $αx^2+(2α^2+β)x+(α^3+αβ+γ)=0$ ισούται με $(2α^2+β)^2-4α(α^3+αβ+γ)=4α^4+4α^2β+β^2-4α^4-4α^2β-4αγ=β^2-4αγ$.

Ακόμη, σπουδαίο κομμάτι της Γραμμικής Άλγεβρας αποτελούν οι γραμμικές απεικονίσεις, οι συναρτήσεις, δηλαδή, μεταξύ διανυσματικών χώρων. Οι συναρτήσεις αυτές διατηρούν αναλλοίωτη την αλγεβρική δομή των διανυσματικών χώρων, δεδομένου ότι διατηρούνται τόσο η πρόσθεση, όσο και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Το άθροισμα, δηλαδή, δύο διανυσμάτων απεικονίζεται σε άθροισμα των εικόνων τους και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με έναν πραγματικό αριθμό, έχει εικόνα τον ίδιο βαθμωτό πολλαπλασιασμό της εικόνας του (Κρόκος, 2010; Στρατηγόπουλος 1994). Έστω δηλαδή V και W δυο διανυσματικοί χώροι. Μια συνάρτηση $F: V \to W$καλείται γραμμική αν:

$$F(x+y)=F(x)+F(y), \forall x,y \in V$$
$$F(\lambda x)=\lambda F(x), \lambda \in R, x \in V$$

Μάλιστα, αν η απεικόνιση F είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του W, τότε καλείται ισομορφισμός (μια πολύ σημαντική έννοια στα Ανώτερα Μαθηματικά) και οι διανυσματικοί χώροι V και W έχουν παντελώς ίδια, αναλλοίωτη δομή, όσον αφορά στις ιδιότητές τους.

Τα μαθηματικά αναλλοίωτα ως μαθησιακές σταθερές

Τα Μαθηματικά παρά την πολλαπλή συνεισφορά τους στη θεμελίωση κάθε επιστήμης θεωρούνται δύσκολο και στρυφνό μάθημα (Chaamwe, 2010; Μαστρογιάννης, 2010). Πράγματι, η διδασκαλία τους ταλανίζεται από σοβαρά προβλήματα, αφού πρωτίστως δυσκολεύεται να παρακινήσει τους μαθητές και να διατηρήσει ακολούθως αμείωτο το ενδιαφέρον τους (Naeve & Nilsson, 2004). Ήδη από τη δεκαετία του 1980 είχε παρατηρηθεί ότι τα παιδιά του Δημοτικού σχολείου τείνουν να απολαμβάνουν τα Μαθηματικά. Αυτή όμως η θερμή παιδαγωγική σχέση μειώνεται δραματικά στα χρόνια του Γυμνασίου και του Λυκείου (Middleton & Spanias, 1999). Μια απολαυστική διδασκαλία, μεταξύ πολλών άλλων, ενισχύει και ενεργοποιεί την ανακαλυπτική-διερευνητική και ομαδοσυνεργατική μάθηση, την εκμάθηση στρατηγικών, την επίλυση προβλημάτων και στηρίζεται, απαραιτήτως, στη δημιουργία κινήτρων και ευάρεστου περιβάλλοντος. Η ανακάλυψη αναλλοίωτων, έστω και με έναν παιγνιώδη τρόπο, λειτουργώντας παρακινητικά, μπορεί να καταστεί ικανή να γεφυρώσει αυτή τη θρυλούμενη δυσκαμψία και την κακοθυμία των Μαθηματικών, αλλά και να αποκαλύψει το μεγαλείο τους. Η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, στα πρώτα χρόνια στο σχολείο, είναι με αυτόν τον τρόπο περισσότερο εφικτή και λιγότερο βεβαρημένη.

Σε κάθε περίπτωση, ο εντοπισμός των σταθερών στα Μαθηματικά είναι μια γοητευτική διαδικασία και αποτελεί σημαντική διδακτική και παιδαγωγική πρόκληση, καθώς η γνώση των αναλλοίωτων μπορεί να λειτουργήσει ως βάση θεμελίωσης όλου του μαθηματικού οικοδομήματος. Επιπλέον, οι σταθερές αλήθειες των Μαθηματικών, που κάποιες φορές είναι απλές, μπορεί να αναδείξουν και τη σημαντικότητά τους στην εξήγηση παραμέτρων και φαινομένων της καθημερινής ζωής. Αυτή η παραδοχή αποτελεί μια τεράστια μεθοδολογική στόχευση, αφού έτσι μειώνεται η λεγόμενη αδρανής γνώση, και τα Μαθηματικά αποσυμπλέκονται από το επαχθές φορτίο της δυσκολίας και της πνευματικής «ελιτοποίησης», που (πολύ κακώς) κομίζουν.

Στη συνέχεια, θα παρατεθεί για παιδαγωγική αξιοποίηση μια σειρά απλουστευμένων και τετριμμένων, σε κάποιες περιπτώσεις, παραδειγμάτων εννοιών των Μαθηματικών, υπό μια γενικότερη μαθηματική ομπρέλα, αυτή του αναλλοίωτου, ώστε να γίνονται καταληπτές και από μη Μαθηματικούς και, κυρίως, από εκπαιδευτικούς της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. Ο Lagrange έλεγε ότι ένας μαθηματικός έχει κατανοήσει καλά το έργο του, μόνο όταν το έχει κάνει τόσο ξεκάθαρο και απλό, ώστε να το εξηγήσει στον πρώτο άνθρωπο, που θα συναντήσει στον δρόμο (Bell, 1995).

Η αρχή της μελέτης μπορεί να έχει ως αφετηρία τη Γεωμετρία, αφού αυτή είναι περισσότερο συνδεδεμένη με σταθερές και βρίθει αναλλοίωτων, τα οποία μπορούν, κατά μια μεταφορική έννοια, να χαρακτηριστούν σαν πλεμάτια σύλληψης των μυστικών και των κρυμμένων κωδίκων της γεωμετρικής γνώσης. Πράγματι, η Γεωμετρία του Ευκλείδη κρύβει και φιλοξενεί από άκρη σε άκρη της αναλλοίωτες και σταθερές, μια όντως ελκυστική πραγματικότητα, που ευνοεί ασφαλώς τη μελέτη της. Αυτός ο εντοπισμός των σταθερών, η αναζήτηση των αμετάβλητων κομματιών στο γεωμετρικό μωσαϊκό, αποκωδικοποιεί και αποκαλύπτει την περίτεχνη γεωμετρική ομορφιά, δημιουργώντας, ενδεχομένως, και ενισχυτικές μαθησιακές συνθήκες. Μια μικρή, τυχαία σταχυολόγηση θα συμπεριλάμβανε την ιδιότητα του ορθόκεντρου, του έκκεντρου, του βαρύκεντρου και του περίκεντρου των τριγώνων, το «αμετάβλητο» άθροισμα γωνιών τριγώνου αλλά και κανονικού πολυγώνου, τη σταθερά π=3,14…, την ισότητα των κατά κορυφήν γωνιών, τη σταθερότητα της σχέσης του Πυθαγορείου θεωρήματος, τα θεωρήματα των διάμεσων και των διχοτόμων, το απόστημα που διατηρείται πάντοτε κάθετο στην χορδή αλλά και όλες τις σταθερές ευκλείδειες μετρικές σχέσεις. Οπωσδήποτε, υπάρχουν και περισσότερο πολύπλοκες γεωμετρικές κατασκευές, στις οποίες διατηρούνται αναλλοίωτα κάποια μέρη τους, ιδιότητες ή σχέσεις τους (Μαστρογιάννης, 2015). Μάλιστα, σήμερα στον καιρό της ψηφιακά πριμοδοτημένης εποχής, η προσφορά των Δυναμικών Περιβαλλόντων Γεωμετρίας είναι αδιαπραγμάτευτη (Thaqi, Gimenez & Rosich, 2011). Τα λογισμικά αυτά, μέσω του «οπτικοποιημένου παιχνιδίσματος» αλλά και της διαδικασίας του συρσίματος που προσφέρουν, καθιστούν την αναζήτηση και τη μελέτη του χώρου των γεωμετρικών αναλλοίωτων μια συναρπαστική και λίαν αποδοτική μαθησιακή διαδικασία. Η αξιοποίηση των δυναμικών λογισμικών δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να μελετούν ανεξάρτητα τις αμετάβλητες σχέσεις των γεωμετρικών σωμάτων και μέσω εικασιών και οπτικών ελέγχων να βελτιώνουν τη γεωμετρική και χωρική τους σκέψη (Hudson, Henderson & Hudson, 2015).

Τα πρώτα χαρακτηριστικά και απλά παραδείγματα αναλλοίωτων

Το πλέον θεμελιώδες παράδειγμα αναλλοίωτου (Sinitsky & Ilany, 2009) είναι η ανθρώπινη ικανότητα για μέτρηση. Η διαδικασία αυτή αρχίζει με τη μετάβαση από τα αντικείμενα στις ποσότητες και αναπτύσσεται μέσα από πολλές δραστηριότητες καταμέτρησης αντικειμένων διαφορετικής φύσης. Στο στάδιο αυτό, η ποσότητα παραμένει αναλλοίωτη σε σχέση με τις φυσικές ιδιότητες των συγκεκριμένων αντικειμένων. Οι μαθητές, για παράδειγμα, μπορούν να μετρούν ένα δεδομένο σύνολο αντικειμένων με διαφορετικούς τρόπους και τελικά να ανακαλύπτουν ότι το αποτέλεσμα είναι αναλλοίωτο και ανεξάρτητο των διάφορων (σωστών, φυσικά) διαδικασιών καταμέτρησης.

Μια άλλη αναλλοίωτη ιδιότητα μπορεί να αναζητηθεί στον πρώτο χρονικά αλγόριθμο, που παρουσιάσθηκε στα Μαθηματικά. Ο περί ου ο λόγος αλγόριθμος του Ευκλείδη, που χρησιμοποιείται για την εύρεση του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη (ΜΚΔ) αριθμών, έχει την ιδιότητα ο ΜΚΔ να παραμένει ο ίδιος μετά από την αντικατάσταση των μεγαλύτερων αριθμών, με τις αντίστοιχες διαφορές τού μικρότερου από καθέναν από αυτούς.

Αξιοσημείωτη και αναλλοίωτη είναι (εξ ορισμού) και η ιδιότητα των πρώτων αριθμών, περί της ύπαρξης δηλαδή, δυο μόνο διαιρετών τους, όπως αναλλοίωτο παραμένει και το γινόμενο των συντελεστών διευθύνσεων δυο κάθετων ευθειών, αφού αυτό ισούται με -1 (Clark-Wilson, 2013). Ακόμη, αναλλοίωτη-αμετάβλητη διατηρείται η ιδιότητα της διαιρετότητας ενός αριθμού με το 3 ή με το 9, σε σχέση με οποιαδήποτε αναδιάταξη των ψηφίων του. Το πλήθος των διαιρετών ενός αριθμού, επίσης, είναι σταθερά άρτιο, πλην της περίπτωσης των αριθμών που είναι τέλεια τετράγωνα. Τα γινόμενα δυο συγκεκριμένων διαιρετών, κάθε φορά, είναι πάντοτε σταθερά (ο ίδιος ο αριθμός).

Επιπλέον, πολλές από τις επινοήσεις των παιδιών, κατά την εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών, μπορούν να εξηγηθούν μέσω συλλογισμών, οι οποίοι στηρίζονται σε μεταβλητές και αναλλοίωτα (Behr & Harel, 1990). Η πρόσθεση 8+9, για παράδειγμα, μπορεί να μετατραπεί για μνημονικούς λόγους στην (8+8)+1=16+1 (αφού, 8+8=16 είναι περισσότερο ευκολομνημόνευτο). Η σχέση της ισότητας, δηλαδή, παραμένει αναλλοίωτη και δεν επηρεάζεται από την αλλαγή του 9 σε (8+1). Παρόμοιες στρατηγικές εφευρίσκονται και κατά τη λεγόμενη υπέρβαση της δεκάδας (π.χ.7+5= (7+3)+2=10+2=12). Αλλά και στην εκμάθηση της προπαίδειας τέτοιες πρακτικές, μέσω αναλλοίωτων, είναι συχνή μαθητική καταφυγή (π.χ. 3x6=2x6+6 ή 4x7=2x7+2x7), επειδή ο διπλασιασμός αριθμών (ή πρόσθεση διδύμων) έχει, μάλλον, τα περισσότερα μνημονικά ερείσματα. Η αντιμεταθετική, η προσεταιριστική και η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση είναι κλασικά παραδείγματα δράσης με αναλλοίωτα αποτελέσματα.

Φυσικά, αναλλοίωτη παραμένει και η αξία ενός κλάσματος, αν διαιρεθούν οι όροι του με τον ίδιο αριθμό (όπως γίνεται στην απλοποίηση) ή πολλαπλασιασθούν, όπως συμβαίνει κατά την ομωνυμοποίηση των κλασμάτων. Επίσης, αμετάβλητη διατηρείται και η ανίσωση $\alpha>\beta$ μετά τη δράση του μετασχηματισμού $\alpha\rightarrow\alpha+\lambda$ και $\beta\rightarrow\beta+\lambda$ (α, β, λ πραγματικοί αριθμοί).

Ακόμη, και το άθροισμα των λύσεων ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αμετάβλητο, όσον αφορά στον σταθερό όρο γ, καθότι $\rho_1+\rho_2= - \beta/\alpha$, ενώ και το γινόμενο λύσεων παραμένει αμετάβλητο, όσον αφορά στον γραμμικό συντελεστή β, αφού και $\rho_1\rho_2 = \gamma/\alpha$ (Education Development Center, 2002). Τέλος, σταθερή παραμένει και η περιττότητα ενός αριθμού, αν αφαιρεθεί από αυτόν ένας άρτιος αριθμός.

Το αναλλοίωτο στην Άλγεβρα και στην αριθμολογία της ζωής και της φύσης

Η Αριθμητική, η Γεωμετρία και η Άλγεβρα, αναμφισβήτητα, στηρίζονται και εξυπηρετούνται από αναλλοίωτα, έχοντάς τα ως ξέφωτα, τα οποία βοηθούν στην εξερεύνηση και φανέρωση των κρυπτογραφημένων γεωμετρικών, αριθμητικών και αλγεβρικών μυστικών τους. Ακολούθως, οι μυστηριώδεις αριθμοί που εμφανίζονται στη φύση και στον κόσμο, ο π, όπως ήδη αναφέρθηκε, αλλά και ο φ και ο e είναι ανεξήγητες, μα θαυμαστές αριθμητικές σταθερές, ικανές να αιχμαλωτίσουν το πνεύμα και να γεννήσουν την έκσταση απέναντι στη φυσική γοητεία και μαγεία. Ο χρυσός μέσος ή χρυσή τομή, που συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα φ, είναι επινόηση των αρχαίων Ελλήνων και, ανά τους αιώνες, κρατάει τα σκήπτρα της διασημότερης κλίμακας. Είναι ένας άρρητος αριθμός, όπως και ο π, και ισούται με $\phi=(1+\sqrt{5})/2\approx 1{,}618033988749895$. Η αναλογία του χρυσού μέσου είναι αυτή, που δίνει τη λύση στο πρόβλημα: «Αν ΑΒ ένα ευθύγραμμο τμήμα, τότε πώς πρέπει να διαιρεθεί από ένα εσωτερικό του σημείο Γ, έτσι ώστε ΑΒ/ΑΓ= ΑΓ/ΓΒ, δηλαδή ο λόγος των δυο τμημάτων ΑΓ και ΓΒ να είναι ίσος με τον λόγο του μεγαλύτερου τμήματος ως προς το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα;» Ο φ «παραμονεύει» στην ακολουθία, της οποίας οι όροι ορίζονται από τις σχέσεις: $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=1$, $\alpha_4=2$ και $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$, με $\nu\geq 3$. Ισχύει δε, $\lim \alpha_{\nu+1}/\alpha_\nu=(\sqrt{5}+1)/2=1{,}618\ldots$, όταν $\nu\to\infty$. Αυτή η ακολουθία είναι γνωστή ως «αριθμοί Fibonacci», προς τιμή του Ιταλού μαθηματικού του 13ου αιώνα, Filius Bonacci, ο οποίος τη μελέτησε (Μαστρογιάννης, 2009). Η ακολουθία αυτή με διαδοχικούς όρους 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …, x, y, x+y,… εμφανίζεται σε πολλές αξιοσημείωτες και απροσδόκητες περιπτώσεις. Συναντάται, για παράδειγμα, στο πρόβλημα (Eves, 1989): «Πόσα ζευγάρια κουνέλια μπορούν να γεννηθούν από ένα ζευγάρι, μέσα σ' ένα χρόνο, αν κάθε ζευγάρι γεννά κάθε μήνα ένα νέο ζευγάρι, που από τον 2ο μήνα αρχίζει και αυτό να γίνεται παραγωγικό»; Επίσης και στον γρίφο «Ένα σκυλάκι ανεβαίνει μια σκάλα, αλλά κάθε φορά μπορεί να περνά 1 ή 2 σκαλοπάτια, μόνο. Αν υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός σκαλοπατιών, πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για να σκαρφαλώσει το σκυλάκι μέχρι την κορυφή;». Για παράδειγμα, για σκάλα με 2 σκαλοπάτια, υπάρχουν 2 τρόποι, με 3 σκαλοπάτια 3 τρόποι, με 4 υπάρχουν 5 τρόποι, με 5 σκαλοπάτια υπάρχουν 8 τρόποι κ.λπ. Ακόμη, ο αριθμός φ έχει εφαρμογές σε προβλήματα διαχωρισμού, στον πολλαπλασιασμό μελισσών, στην φυλλοταξία στην ελικοειδή, δηλαδή, τάση στη φύση, όπου τα κλάσματα που αντιπροσωπεύουν την ελικοειδή διευθέτηση των φύλλων στα λουλούδια (μετρώντας τις καμπύλες που πηγαίνουν σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού προς αυτές που πηγαίνουν αντίθετα), αποτελούν, σχεδόν πάντοτε, μέλη της σειράς τού Fibonacci (Weyl, 1991). Ο αριθμός της χρυσής τομής φ εμφανίζεται και σε πολλές άλλες περιπτώσεις στη φύση (ανθρώπινα οικοδομήματα, πίνακες ζωγραφικής, αγάλματα, στο λεγόμενο χρυσό τρίγωνο κ.α.) και αναδεικνύει την καλαισθησία, ως εξιδανίκευση της ομορφιάς και της αρμονίας, προσφέροντας αισθητική απόλαυση, τέρποντας την όραση.

Αλλά και ο άλλος πρωταγωνιστής αριθμός στα Μαθηματικά, ο e, αποτελεί μιαν αναλλοίωτη έννοια, ένα όριο. Σαφώς, όλα τα όρια, υπό μια έννοια, είναι αμετάβλητοι, σταθεροί προορισμοί μαθηματικών παραστάσεων, των οποίων κάποια στοιχεία (μεταβλητές) διαρκώς μεταβάλλονται, τείνοντας προς έναν αριθμό ή στο άπειρο. Ο αριθμός e έχει πίσω του μια μικρή ιστορία δανεισμού και αποπληρωμής τόκων. Έστω, λοιπόν, Κ το κεφάλαιο και Ε το ετήσιο επιτόκιο (Abbott, 1967). Στο τέλος του πρώτου χρόνου ο τόκος θα είναι Κ·Ε και το ποσό Κ+Κ·Ε=Κ(1+Ε). Στο τέλος του δεύτερου χρόνου ο τόκος θα είναι Κ(1+Ε)·Ε και το ποσό Κ(1+Ε)+Κ(1+Ε)·Ε= Κ(1+Ε)(1+Ε)=$K(1+E)^2$. Εργαζόμενοι ομοίως, εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί πως στο τέλος του τ-στού χρόνου, το ποσό θα είναι $K(1+E)^\tau$. Αν τώρα οι όροι του δανείου είναι κατά τι σκληρότεροι και ο τόκος προστίθεται στο τέλος κάθε εξαμήνου, τότε το ποσό θα είναι Κ[1+(Ε/2)], ενώ στο τέλος του πρώτου χρόνου θα είναι $K[1+(E/2)]^2$. Κατ' αναλογία στο τέλος του τ-στού έτους, το ποσό θα είναι $K[1+(E/2)]^{2\tau}$. Αν ο τόκος προστίθεται κάθε μήνα, μάλλον εύκολα μπορεί να βρεθεί ότι το ποσό στον 1ο χρόνο θα είναι $K[1+(E/12)]^{12}$ και στο τέλος του τ-στού $K[1+(E/12)]^{12\tau}$. Αν ο τόκος προστίθεται ν φορές το χρόνο, τότε στο τέλος του τ-στού χρόνου το τελικό ποσό θα έχει ανέλθει στο $K[1+(E/\nu)]^{\tau\nu}$. Στην περίπτωση που το αρχικό κεφάλαιο είναι 1 (Κ=1) και το επιτόκιο 1% (Ε=1), στο τέλος του πρώτου έτους με ν ετήσιους ανατοκισμούς, το ποσό θα είναι $[1+(1/\nu)]^\nu$. Αν τώρα $\nu\to\infty$, δηλαδή ο ανατοκισμός γίνεται κατά απείρως μικρά χρονικά διαστήματα, το τελικό ποσό θα είναι $\lim[1+(1/\nu)]^\nu$, με $\nu\to\infty$. Αυτό το όριο είναι ο άρρητος αριθμός e= 2,718281828… Η σταθερά e, όπως και το π εμφανίζεται, αναπάντεχα, σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών. Ο Νεύτωνας, για παράδειγμα, απέδειξε τον 17ο αιώνα ότι e=1+1+1/2!+1/3!+1/4!+1/5!+… Ο π, σε μια από τις πλέον παράξενες παρουσίες του, βρίσκεται …επιμελώς κρυμμένος στο άπειρο γινόμενο $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}x\frac{2}{3}x\frac{4}{3}x\frac{4}{5}x\frac{6}{5}x\frac{6}{7}x...$ αλλά και στη σειρά $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+...$ Επίσης, βρίσκεται και στη φύση, αφού λέγεται ότι προκύπτει, ως ο λόγος του πραγματικού μήκους των φιδωτών ποταμών ως προς την κατευθείαν απόστασή τους (Singh, 1998). Τελικά ο e και ο π, αυτοί οι άρρητοι και υπερβατικοί αριθμοί (δεν είναι λύση καμιάς εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές) με την τεράστια, παράξενη γοητεία, ενώθηκαν και χάρισαν το ομορφότερο για πολλούς, μαθηματικό αποτέλεσμα, ως τα τώρα (García del Cid, 2012; Acheson, 2010): $e^{i\pi}=-1$, όπου $i^2=-1$.

Μπορεί να παρατηρηθεί, μέσα από τα παραδείγματα των 3 σειρών που προηγήθηκαν, ότι σε αυτά συμπλέκονται οι έννοιες του απείρου και του πεπερασμένου. Αριστερά υπάρχει μια σταθερά, μια αναλλοίωτη ποσότητα, το ενεστωτικό άπειρο, και δεξιά μια άπειρη σειρά, το δυναμικό άπειρο άθροισμα (Δρόσος, 1999). Μια μεταβαλλόμενη ποσότητα επομένως, που έχει έναν τερματισμό σταθερό, μια οροφή, δηλαδή, αναλλοίωτη.

Σχετικά με την έννοια του απείρου, σοβεί και ένα άλλο αναλλοίωτο, το οποίο είναι αδύνατο να κατανοηθεί από την κοινή λογική. «Το πλήθος των σημείων ενός ευθυγράμμου τμήματος, οποιουδήποτε μήκους, είναι σταθερό και αμετάβλητο». Γενικά, τα μαθηματικά παράδοξα μπορούν να ενισχύσουν την κατανόηση πολλών μαθηματικών εννοιών και προσφέρονται, αδιαμφισβήτητα, για διδακτική αξιοποίηση, συμβάλλουν δε, και στην απενοχοποίηση των λαθών. Σύμφωνα με τον Δανό φιλόσοφο Soren Kierkegaard (1813-1855), το παράδοξο είναι το πάθος της σκέψης (Fresan, 2012). Οι μαθητές παρακινούνται να ανακαλύψουν, να συγκρίνουν και να προβληματιστούν, και τελικά να αισθανθούν την παιδαγωγική ευαρέσκεια, όταν καταφέρουν να αποκρυπτογραφήσουν την «παράδοξη» αλήθεια (Χαραλαμπίδου, 2008). Ένα παράδοξο αποτέλεσμα ή ένα άλυτο μυστήριο, όντως, κεντρίζει το ενδιαφέρον και παρακινεί τους μαθητές για μελλοντικές αναζητήσεις. Ο Sir Andrew Wiles, για παράδειγμα, σε πολύ μικρή ηλικία είχε έλθει σε επαφή με το τελευταίο θεώρημα του Φερμά, γεγονός που τον πείσμωσε, ώστε πολλά χρόνια αργότερα να καταφέρει να λύσει αυτό το μεγάλο μυστήριο των Μαθηματικών. Επιπλέον, έχει παρατηρηθεί ότι και οι νέοι εκπαιδευτικοί, ως αποτέλεσμα των προσπαθειών τους να διαλευκάνουν παράδοξα, αναπτύσσουν διάθεση συνεργασίας αλλά και χαρακτηριστικά πολυμάθειας. Επίσης, βρέθηκε ότι δείχνουν περισσότερο ενδιαφέρον για τη σημασία των παραδόξων στα Μαθηματικά, καθώς η αποσαφήνισή τους αποδυναμώνει την πεποίθηση ότι τα Μαθηματικά είναι αλάθητη ή και απόλυτη επιστήμη (Sriraman, 2009).

Στην προκειμένη περίπτωση, ο μεγάλος Γερμανός μαθηματικός, θεμελιωτής της θεωρίας συνόλων, George Cantor (1845-1918), απέδειξε την ύπαρξη διαφορετικών ειδών απείρου. Το άπειρο των ακεραίων αριθμών από τη μια μεριά και το άπειρο των σημείων μιας ευθείας (ή ενός τμήματος) από την άλλη. Το άπειρο των ακεραίων αριθμών είναι το μικρότερο άπειρο και τα στοιχεία του μπορούν να τοποθετηθούν σε μία «ένα προς ένα» και επί αντιστοιχία, με τα στοιχεία του συνόλου των φυσικών αριθμών. Κάθε τέτοιο σύνολο καλείται αριθμήσιμο και το πλήθος του είναι ο πρώτος άπειρος πληθάριθμος, που ο Cantor συμβόλισε, χρησιμοποιώντας το πρώτο γράμμα του εβραϊκού αλφάβητου με δείκτη μηδέν, ως αλέφ μηδέν. Όλα τα σύνολα, τα άπειρα σύνολα, δεν έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, αφού, για παράδειγμα, το σύνολο R των πραγματικών αριθμών ή και των αρρήτων έχει πλήθος (δύναμη) που συμβολίζεται με C και καλείται δύναμη του συνεχούς (continuum = συνεχές).

Το πλήθος των σημείων ενός ευθυγράμμου τμήματος, οσοδήποτε μικρού όπως πρωτύτερα αναφέρθηκε, είναι επίσης C. Το πλήθος των αξόνων συμμετρίας ενός κύκλου οποιασδήποτε ακτίνας είναι, πάλι, C (ισάριθμο των διαμέτρων του). Τα παραπάνω σύνολα, όπως και κάθε ισοδύναμό τους (ισάριθμό τους) ονομάζονται μη αριθμήσιμα άπειρα και συμβολίζονται με αλέφ ένα (Mastrogiannis & Trypa, 2010). Αν και ο Cantor πολεμήθηκε πολύ σκληρά και ανελέητα από τους συγχρόνους του, για αυτές τις φαινομενικά παράλογες αιτιάσεις του (πέθανε τελικά σε ψυχιατρείο), βρήκε τελικά δικαίωση στις αποδείξεις του, που επαλήθευσαν τους ισχυρισμούς του, αλλά και στα λόγια του David Hilbert που δήλωνε: «από τον Παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor, κανείς δεν είναι σε θέση να μας βγάλει» (Μαστρογιάννης, 2009).

Αναλλοίωτα πολλά υπάρχουν και στις πιθανότητες. Έτσι, η πιθανότητα να έχουν γενέθλια την ίδια ημερομηνία 2 τουλάχιστον άτομα, σύμφωνα με την «αρχή του περιστερώνα ή του Dirichlet» (Corbalan & Sanz, 2012; Κουνιάς & Μωυσιάδης, 1995), είναι σταθερά 100%, αν σε μια συνάθροιση παρευρίσκονται περισσότερα από 366 άτομα. Ο αριθμός e δε, υπεισέρχεται και στις πιθανότητες, καθώς η πιθανότητα να μην εμφανιστεί ζευγάρι με τα ίδια φύλλα, αν τραβιούνται εναλλάξ χαρτιά από 2 διαφορετικές τράπουλες είναι 1/e, δηλαδή περίπου 37% (Acheson, 2010). Ακόμα, ανεξάρτητη …της πολλαπλότητας και της συχνότητας των θεϊκών επικλήσεων είναι η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος στο Τζόκερ ή στο Λόττο ή να πάθει ατύχημα, κινούμενος στην εθνικό οδό. Στην πρώτη περίπτωση η πιθανότητα κέρδους είναι απειροελάχιστη, ίση με $1/[(45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41/5!)\cdot20]=1/24.435.180$ (στην πλέον αποδοτική κατηγορία 5+1), στο Λόττο η πιθανότητα κέρδους, παίζοντας ένα παιχνίδι, αυξάνεται σε $1/49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44/6!=1/13.983.816$, ενώ στην τελευταία περίπτωση του ατυχήματος (Μωυσιάδης & Αντωνίου, 2015), η πιθανότητα μεγαλώνει απελπιστικά και γίνεται περίπου 1/1.000. Αυτή η αντιπαραβολή παρέχει σαφή διδακτικά πλεονεκτήματα και αναβαθμίζει κατά πολύ την επεξηγηματικότητα και τη σημαντικότητα των Μαθηματικών, αφού είναι ικανή να μας πείσει ότι, μάλλον, οι αβάσιμες πεποιθήσεις μας για αίσιες εκβάσεις και οι σταθεροί, ευσεβείς μας πόθοι αλλοιώνουν την πραγματικότητα, μέσω των εξαρτημένων προσδοκιών μας.

Η …αναλλοίωτη διασκεδαστικότατα των «ψυχρών» Μαθηματικών

Τέλος, θα ακολουθήσουν μερικά χαρακτηριστικά και απλά παραδείγματα αναλλοίωτων που απαντώνται σε παιχνίδια και σε «μαντεψιές» με σκοπό να προσδοθεί ένας εύθυμος και χαλαρός τόνος, μια διασκεδαστική πινελιά και νότα, σε μια καθαρά αλγεβρική έννοια. Είναι, μάλλον, παγιωμένη η λαθεμένη αντίληψη της κοινής γνώμης ότι δε χωράει χιούμορ στα, ομολογουμένως, άχρωμα και αυστηρά Μαθηματικά. Ωστόσο, η διασκεδαστικότητα ίσως να συμβάλει, ως ένα σημαντικό μαθησιακό και διδακτικό εφόδιο, και στην απομυθοποίηση της δυσκολίας των Μαθηματικών και στη συμφιλίωση μαζί τους αλλά και στη δημιουργία μιας ευδαιμονικής ατμόσφαιρας στην τάξη, καθότι ένας καλός δάσκαλος, και ειδικά των Μαθηματικών, πρέπει να κατέχει, έστω και λίγο, κάτι από την τέχνη του ταχυδακτυλουργού και του κλόουν (Bell, 1995). Η ευθυγράμμιση με αυτήν την παραδοχή επιχειρηματολογεί υπέρ της ένταξης διάφορων παιχνιδιών και γρίφων, που βασίζονται στις αρχές του αναλλοίωτου, στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών ακόμα και των μικρών τάξεων του Δημοτικού Σχολείου (Bogomolny, 1997).

Να ένα παιχνίδι: Δυο λιχούδηδες φίλοι, ο Α και ο Β, έχουν στο τραπέζι 38 καραμέλες απλωμένες. Διαδοχικά παίρνουν 1 ή 2 ή 3 ή 4 καραμέλες. Όποιος μαζέψει τις τελευταίες καραμέλες κερδίζει, και τις τρώει όλες… και τις 38. Βέβαια σε κάθε περίπτωση, ο παίχτης Α θα κερδίσει, ανεξάρτητα από τις κινήσεις του παίχτη Β και τον αριθμό των καραμελών, που θα αφαιρεί κάθε φορά αυτός από το τραπέζι. Να η στρατηγική του Α για τη σταθερή νίκη του: Αρχικά παίρνει 3 καραμέλες. Στην συνέχεια, όταν ο Β πάρει 1, 2, 3 ή 4 καραμέλες, ο Α θα σηκώνει 4, 3, 2 ή 1 αντίστοιχα. Κάθε φορά δηλαδή, ο Β θα αναγκάζεται να παίρνει καραμέλες από ένα πλήθος που είναι πολλαπλάσιο του 5. Τελικά, όταν φτάσει η τελευταία σειρά του, ο Β θα δει μπροστά του 5 καραμέλες. Όσες και να πάρει τότε, ο Α θα μαζέψει τις τελευταίες αλλά και όλες τις προηγούμενες ασφαλώς, αφού θα είναι ο νικητής.

Σε ένα παραπλήσιο παιχνίδι, με 2 παίχτες πάλι (Bogomolny, 1997), τετράγωνα και κύκλοι είναι αραδιασμένα σε ένα τραπέζι. Κάθε παίκτης επιλέγει δύο σχήματα σε κάθε εναλλάξ κίνηση. Σύμφωνα με τον κανόνα του παιχνιδιού, αυτά τα 2 σχήματα, που επιλέγονται, αντικατασταίνονται με ένα και μόνο. Αν είναι ίδια, τη θέση τους παίρνει ένα τετράγωνο, αν είναι διαφορετικά, τότε ένας κύκλος τα αντικαθιστά. Στο τέλος του παιχνιδιού, μόνο ένα σχήμα θα παραμείνει, κύκλος ή τετράγωνο. Οπότε, κάθε παίχτης μπορεί να ποντάρει σε αυτό το τελικό, εναπομείναν σχήμα.

Και σε αυτή την περίπτωση, το αποτέλεσμα είναι εκ των προτέρων προδιαγεγραμμένο. Η αρτιότητα των κύκλων παραμένει αναλλοίωτη, ανεξάρτητη από κάθε κίνηση! Έστω ότι στην αρχή κάθε κίνησης υπάρχουν α κύκλοι και β τετράγωνα. Οι πιθανές επιλογές σε κάθε κίνηση είναι: (κύκλος, κύκλος), (τετράγωνο, τετράγωνο) και (κύκλος, τετράγωνο). Άρα, μετά το τέλος της κάθε κίνησης θα υπάρχουν αντίστοιχα: (α-2 κύκλοι και β+1 τετράγωνα), (α κύκλοι και β-1 τετράγωνα), (α κύκλοι και β-1 τετράγωνα). Γνωρίζοντας, λοιπόν, τον αριθμό των αρχικών κύκλων, κάποιος μπορεί να ποντάρει. Αν είναι άρτιος το τελικό σχήμα θα είναι τετράγωνο, διαφορετικά αν ο αρχικός αριθμός των κύκλων είναι περιττός, τότε ένας κύκλος θα παραμείνει ως το τελικό σχήμα στο τραπέζι.

Επίσης, πολλές φορές, σε κάποια παιχνίδια επιδεικνύονται «μαγικές ικανότητες», όταν κάποιοι μαντεύουν επιτυχώς το τελικό αριθμητικό αποτελέσματα και συναρπάζουν τους γύρω τους, έπειτα από μια ακολουθιακή σειρά πράξεων μεταξύ αριθμών. Ένα παράδειγμα, από τα πολλά που κυκλοφορούν στο διαδίκτυο, ακολουθεί, το οποίο ισχυρίζεται ότι η πραγματική μας ηλικία συναρτάται με τον αριθμό του κινητού μας τηλεφώνου!

- 1ο βήμα: Γράψτε το τελευταίο ψηφίο του κινητού σας τηλεφώνου
- 2ο βήμα: Πολλαπλασίασέ τον επί 2
- 3ο βήμα: Μετά πρόσθεσε το 5
- 4ο βήμα: Πολλαπλασίασε το αποτέλεσμα επί 50
- 5ο βήμα: Στο γινόμενο προσθέστε το 1765
- 6ο βήμα: Από το αποτέλεσμα αφαιρέστε το έτος της γέννησής σας

Στον τριψήφιο αριθμό που προέκυψε, το πρώτο ψηφίο είναι το τελευταίο ψηφίο του κινητού. Τα άλλα δυο ψηφία φανερώνουν την πραγματική ηλικία!

Φυσικά, η σταθερότητα της πρόβλεψης είναι δεδομένη και ανεξάρτητη του τελευταίου ψηφίου του τηλεφώνου. Μάλιστα, η όλη διαδικασία ισοδυναμεί με το μάντεμα της ηλικίας, όταν είναι γνωστό το έτος γέννησης αλλά και το…. ενεστώς έτος!

Έστω, λοιπόν, ότι x τελευταίο ψηφίο του κινητού τηλεφώνου. Στο τέλος του 5ου βήματος έχει δημιουργηθεί η παράσταση $α=(2x+5)\cdot 50+1765=100x+2015$. Αν αφαιρεθεί το έτος γέννησης (π.χ. το 1964), τότε α=100x+51, δηλαδή προκύπτει ο τριψήφιος αριθμός x51 (όπου x το ψηφίο των εκατοντάδων). Όντως, λοιπόν, αυτή η απλή γνώση της ανεξαρτησίας των πράξεων είναι ικανή να «μαντέψει» την τρέχουσα ηλικία των κατάπληκτων φίλων μας. Φυσικά την επόμενη χρονιά, στο 5ο βήμα, πρέπει να προστεθεί το 1766, τη μεθεπόμενη το 1767 κ.ο.κ.

Βέβαια, πολλά τρικ, περισσότερο δύσκολα στην αποκρυπτογράφηση τους και για αυτό και περισσότερο «καθηλωτικά» και καταπληκτικά, κυκλοφορούν από παρέα σε παρέα και… αφήνουν εμβρόντητους τους συμμετέχοντες (Μαστρογιάννης, 2010). Για παράδειγμα, το υπόλοιπο της αφαίρεσης του αθροίσματος των απόλυτων ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού από αυτόν τον ίδιο διψήφιο αριθμό είναι πάντα πολλαπλάσιο του 9. Να η απόδειξη: Έστω, ο διψήφιος αριθμός xy, που σε δεκαδικό ανάπτυγμα γράφεται ως 10χ+ψ (1≤χ≤9 και 0≤ψ≤9). Αν αφαιρεθεί το x+y (το άθροισμα των 2 ψηφίων του), το υπόλοιπο ισούται με 10x+y-x-y=9x (όπου x =1, 2, ... ,9).

Αυτή η σταθερή σχέση είναι ικανή, μέσω μια απλής σεναριοποίησης/δραματοποίησης, να δημιουργήσει απολαυστικές, «εκπληκτικές» ίσως δε, και συμφιλιωτικές συνθήκες με τα «απόμακρα» Μαθηματικά και τη γοητεία τους (Η ιστοσελίδα του Βρετανικού Συμβουλίου www.learnenglish.org.uk/games/magic-gopher-central.swf, μέσω των ικανοτήτων ενός μάντη σκιουράκου, είναι πολύ διασκεδαστική και επιβεβαιωτική).

Ταχυδακτυλουργικό σασπένς (Acheson, 2010) περικλείει η παρακάτω ιστορία, καμωμένη από ένα κόλπο με αριθμούς: Ο ταχυδακτυλουργός γράφει έναν αριθμό στην κενή πλευρά μιας πλάκας που κρατά. Ένας θεατής, από το κοινό του, παρακαλείται να σημειώσει σε ένα χαρτί έναν οποιοδήποτε τριψήφιο αριθμό, με τον όρο το πρώτο και τελευταίο ψηφίο να διαφέρουν τουλάχιστο κατά 2. Κατόπιν, ο θεατής αντιστρέφει αυτόν τον αριθμό και αφαιρεί τον μικρότερο από τον μεγαλύτερο. Ο αριθμός, που προέκυψε, αντιστρέφεται εκ νέου και οι δυο αυτοί αριθμοί προστίθενται. Σε αυτό το σημείο, ο ταχυδακτυλουργός φανερώνει τον κρυμμένο αριθμό στην πλάκα. Και ναι, …ως εκ του θαύματος, προέβλεψε σωστά το τελικό αποτέλεσμα! «1089».

Το τρικ είναι απλό, αφού το τελικό εξαγόμενο δεν εξαρτάται από τον αρχικό τριψήφιο αριθμό. Παραμένει εσαεί, σταθερό και αναλλοίωτο. Έστω, λοιπόν, ο αρχικός τριψήφιος αριθμός 100x+10y+ω, με |x-ω|≥2. Ο αντίστροφός του είναι ο 100ω+10y+x. Από την αφαίρεση αυτών των δυο αριθμών, βρίσκουμε 100x +10y+ω-(100ω+10y+x)=99ω-99x=99φ, όπου 2≤φ≤9. Οι 8 πρώτοι τριψήφιοι αριθμοί, που είναι πολλαπλάσια του 99 είναι της μορφής α9β, με α, β και 1≤α,β≤8. Αυτό συμβαίνει, επειδή 99φ=100φ-φ, δηλαδή στο πολλαπλάσιο του 99 το ψηφίο των δεκάδων του είναι πάντοτε το 9. Στη συνέχεια, καθώς 99φ=9·(11φ), δηλαδή πολλαπλάσιο του 9, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι α+β=9, δεδομένου ότι το τελικό άθροισμα των ψηφίων ενός πολλαπλασίου του 9 είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 9. Η τελική πρόσθεση, λοιπόν, μας δίνει (α9β)+(β9α)=1089. Ας σημειωθεί εδώ, το άξιο διερεύνησης επιχείρημα (Acheson, 2010) ότι η απόλαυση, η έκπληξη και το μυστήριο αυτού του «παιχνιδιού» κάνει τα Μαθηματικά να διαφέρουν πολύ, από αυτά (τα ανιαρά, υπονοείται) που διδάσκονται στα σχολεία.

Ακολούθως, ας σημειωθεί ότι αναλλοίωτη παραμένει και η δυνατότητα σχεδίασης με κλειστή μονοκονδυλιά ενός γραφήματος, αν διαθέτει κορυφές μόνο με άρτιο βαθμό (βαθμός είναι ο αριθμός των ακμών που συντρέχουν σε μια κορυφή). Αν τώρα ένα γράφημα έχει ακριβώς δυο κορυφές περιττού βαθμού, τότε η διαδρομή-μονοκοντυλιά είναι ανοιχτή, με σημεία αφετηρίας και τερματισμού τις παραπάνω κορυφές. Αν, βέβαια, υπάρχει μια μόνο κορυφή με περιττό βαθμό, τότε υπάρχει διαδρομή μονοκονδυλιά με γνωστό μόνο το σημείο αφετηρίας. Για παράδειγμα, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με χαραγμένες και τις δυο διαγωνίους του δεν μπορεί να χαραχτεί μονοκοντυλιά, ενώ αν σχηματιστεί μια «τριγωνική σκεπή» σε μια πλευρά του, το νέο σχήμα γίνεται με μονοκοντυλιά.

Τέλος, με έναν προφητικό, χιουμοριστικό τόνο θα επισημανθεί και μια σταθερή δυνατότητα μη ορθής, σε κάθε περίπτωση, on-off πρόβλεψης του μέλλοντος (Gardner, 1989). Ο Α παίχτης γράφει σε μια κάρτα ένα γεγονός που, πιθανόν, θα συμβεί εντός των 2 επόμενων ωρών και την κρύβει μέσα σε ένα βιβλίο. Ο παίχτης Β καλείται να προβλέψει ποια από τις 2 πιθανότητες θα πραγματοποιηθεί. Αν πιστεύει ότι το γεγονός θα πραγματοποιηθεί, σε ένα κομμάτι χαρτί γράφει «ΝΑΙ», διαφορετικά γράφει «ΟΧΙ». Στην συνέχεια, ο Α παίχτης βγάζει την κρυμμένη κάρτα, στην οποία είχε γράψει το επικείμενο γεγονός προς πρόβλεψη: «Θα γράψεις ΟΧΙ πάνω στο χαρτί». Αν ο Β έχει γράφει ΝΑΙ, έχει προφανώς χάσει. Αν έχει γράψει ΟΧΙ, έχει πάλι αποτύχει, καθότι το γεγονός συνέβηκε και έπρεπε να είχε γράψει ΝΑΙ! Αν και τα Μαθηματικά δεν είναι, επ' ουδενί, καρποί απλών λογικών διεργασιών (Flato, 1993), εντούτοις μέσα από αυτό το απλό παράδειγμα μπορεί να υπαινιχθεί ο δυναμισμός, η ομορφιά και, γιατί όχι, η διασκεδαστικότητα της μαθηματικής λογικής και σκέψης.

Συζήτηση – Συμπεράσματα – Προτάσεις

Τα Μαθηματικά, ως κυρίαρχη επιστήμη, προσπαθούν να ερμηνεύσουν και να εξηγήσουν τη ζωή, τη φύση και τους νόμους της. Συμμάχους και βοηθούς τους, στην αποσυσκότιση των κοσμικών και αριθμητικών σχέσεων και στη σύλληψη των κανόνων και των ιδιοτήτων που διέπουν τις τροχιές, τις αντιστοιχίες και τους δεσμούς του μικρόκοσμου και του μακρόκοσμου, βρίσκουν στις σταθερές και αναλλοίωτες αλήθειες, οι οποίες διάσπαρτες και καμουφλαρισμένες, προκλητικά αποζητούν την ανακάλυψή τους. Βέβαια, τα Μαθηματικά στο κυνήγι της σοφίας μελετούν και τις αλλαγές, τις απειροστές μάλιστα αλλαγές (όσες πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια του ανοιγοκλείσματος του ματιού), μέσω του κοσμήματος της ανθρώπινης διανόησης, του απειροστικού και ολοκληρωτικού λογισμού.

Το αναλλοίωτο και η μεταβολή ασφαλώς συνυπάρχουν, καθώς η δεύτερη προδίδει και αποκαλύπτει το πρώτο. Η ίδια η μάθηση, εξάλλου, είναι αλλαγή, τροποποίηση συμπεριφοράς, η οποία, όμως, μπορεί να δημιουργήσει σταθερές βάσεις για ανάπτυξη βεβαιοτήτων αλλά και απαράβατων αρχών, ιδεών και ιδανικών. Η μεταβολή είναι, σαφώς, κύριο χαρακτηριστικό της ζωής, μέσω και του «κακού» (για τους ανθρώπους, τουλάχιστον) μετασχηματισμού του χρόνου, και για αυτό η επίτευξη αμεταβλητότητας στον χρόνο αποτελεί διαχρονική έμπνευση λογοτεχνών αλλά και συνεχής ώθηση για επιστημονικές και μη αναζητήσεις.

Η παρούσα εργασία συνιστά ένα μικρό ανθολόγιο, μια σταχυολόγηση μαθηματικών αναλλοίωτων, τα οποία προβάλλουν ως πηγές αλήθειας και άγκυρες ορθότητας μέσα στα «πάντα που ρέουν». Πέραν δε αυτού του απανθίσματος, επιχειρήθηκε να δοθεί και μια μαντική και διασκεδαστική προέκταση, ώστε να αναδεχθεί η θετική παρουσία και η επεξηγηματική σημαντικότητα των Μαθηματικών και στην καθημερινή ζωή. Η σταθερότητα και το αναλλοίωτο των μαθηματικών νόμων προσφέρουν ένα πλούσιο επεξηγηματικό πεδίο όλου του κόσμου και οι απλές σταθερές αναλλοίωτες αλήθειες, που ενυπάρχουν στα Μαθηματικά, στηρίζουν το οικοδόμημά του. Πράγματι, τα Μαθηματικά είναι ένας οδηγός για τον κόσμο και χωρίς αυτά η ζωή θα ήταν ακατανόητη και αδιανόητη (Sardar, Ravetz, & Van Loon, 2015). Επιπλέον, επιχειρήθηκε να αναδειχθούν οι παιδαγωγικές παρωθήσεις αλλά και η μαθησιακή δυναμική των παρατιθέμενων παραδειγμάτων, μέσω πολλών νύξεων και παραπομπών για παιδαγωγική και διδακτική αξιοποίηση των αναλλοίωτων στην καθημερινή διδακτική πρακτική, αρχομένης από τις τάξεις του Δημοτικού Σχολείου.

Τα Μαθηματικά, αναντίρρητα, υπαγόρευσαν αναλλοίωτους, σταθερούς νόμους που διέπουν τη φύση και το σύμπαν, προσδιόρισαν την κατεύθυνση και το περιεχόμενο πολλών φιλοσοφικών συλλογισμών, γκρέμισαν και ξανάχτισαν θρησκευτικά δόγματα, βάσισαν πολιτικές και οικονομικές θεωρίες, οιστρηλάτησαν τα χέρια και μυαλά των μηχανικών, τα πινέλα των ζωγράφων, τις πένες των λογοτεχνών, τις χορδές των μουσικών οργάνων. Τα Μαθηματικά και ως ένα δίκτυο αποκαλυπτικών, αναλλοίωτων νόμων, εκτόπισαν τη συνήθεια, το τυχαίο, το απρόβλεπτο, το ανεξήγητο, τη δεισιδαιμονία, την αφέλεια, τη φενάκη και χάρισαν την κρίση και τον ορθολογισμό. Από την εποχή του Πυθαγόρα ακόμα, ο οποίος παραδεχόταν ότι τα πάντα είναι αριθμοί, αφού αυτοί, όπως πίστευε, ενυπάρχουν σε όλα τα πράγματα, από την αρμονία στη μουσική μέχρι τις κινήσεις των ουρανίων σωμάτων, το κυνήγι για την ανεύρεση σταθερών και νόμων είναι συνεχές και ανεξάντλητο.

Και σήμερα αναζητούνται μαθηματικοί νόμοι, που κυριαρχούν στον κόσμο και κυβερνούν κάθε φυσική διαδικασία. Η ομορφιά στα ίχνη της φύσης, στους νόμους και στις κανονικότητες είναι επιβλητική. Αν και στις μέρες μας η προσοχή επικεντρώνεται σε νέα πρότυπα, γνωστά ως φράκταλ (π.χ το σχήμα των σύννεφων) και χάος (π.χ οι καιρικές συνθήκες), αυτοί οι μαθηματικοί πρωτεργάτες οι αριθμοί αλλά και τα αριθμητικά μοτίβα και τα αναλλοίωτα της φύσης θα συνεχίσουν να θέλγουν τον άνθρωπο και ταυτόχρονα θα τον διεγείρουν και θα τον προκαλούν να τα ανακαλύψει, να τα αποκωδικοποιήσει και να τα κατακτήσει.

Και, ως κατακλείδα, επειδή η παρούσα εργασία έχει πρωτίστως εκπαιδευτική χροιά και στόχευση, ας μνημονευθεί μια τελική αναλλοίωτη, μια σταθερή κατεύθυνση που πρέπει οι δάσκαλοι καθημερινά να διαβαίνουν: «Η σταθερή και αταλάντευτη αγάπη για το έργο τους και, κυρίως, για τους μαθητές τους…»

Αναφορές

Abbott, P. (1967). *Teach Yourself Calculus*. London: The English Universities Press

Behr, M., & Harel, G. (1990). Understanding the Multiplicative Structure. In G. Booker, P. Cobb, & T.N. de Merldicutti (Eds.) *Proceedings of the PME XIV Conference*. Volume III (pp. 27-34). Mexico: Consejo Nacional de Ciencia y Technologia, Gobierno del Estado de Morelos

Bogomolny, A. (1997). *Cut The Knot! An interactive column using Java applets*. Retrieved April 2, 2015, from http://www.cut-the-knot.org/SimpleGames/one_two.shtml

Clark-Wilson, A. (2013). A methodological approach to researching the development of teachers' knowledge in a multi-representational technological setting. In A. Clark-Wilson, N. Sinclair, & O. Robutti (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital* Era (Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 2), Dordrecht: Springer

Dolgachev, I. (2003). *Lectures on invariant theory*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press

Education Development Center (2002). *Examples, Patterns, and Conjectures*. Making Mathematics: August 8, 2002. Retrieved April 20, 2015, from http://www.focusonmath.org/sites/focusonmath.org/files/assets/Conjectures.pdf

Furinghetti, F., Matos, J. M., & Menghini, M. (2013). From Mathematics and Education, to Mathematics Education. In M.A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K.S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education*, Volume 27, 272-302, Springer International Handbooks of Education

Healy, L., &. Powell, A. (2013). Understanding and Overcoming "Disadvantage" in Learning Mathematics. In M.A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick F. K.S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education,* Volume 27, 69-100, Springer International Handbooks of Education

Hudson, B., Henderson, S., & Hudson, A. (2015) Developing mathematical thinking in the primary classroom: liberating students and teachers as learners of mathematics. *Journal of Curriculum Studies*, 47:3, 374-398

Kraft, H., & Procesi, C. (1996). *Classical Invariant Theory. A Primer.* Retrieved March 28, 2015, from http://scholarcommons.usf.edu/etd/3421

Leung, A. (2012a). Variation and mathematics pedagogy. In Dindyal, J., Cheng, L. P. & Ng, S. F. (Eds.), *Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 433–440). Singapore: MERGA. 2 July 2012 - 6 July 2012

Leung, A. (2012b). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. *12th International Congress on Mathematical Education* (ICME-12), COEX, Seoul, Korea, 8 -15 July

Leung, A. (2010). Empowering learning with rich mathematical experience: reflections on a primary lesson on area and perimeter. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* [e-Journal]. Retrieved April 20, 2015, from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/leung.pdf

Mason, J. (2007). Research and practice in algebra: Interwoven influences. In Pitta – Pantazi, D. & Philippou, G (eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 913-923), Larnaca, Cyprus, 22 - 26 February 2007

Mastrogiannis, A., & Trypa, A. (2010). Investigating the types of infinity using both Dynamic Geometry systems and the transformation of axial symmetry in regular polygons and the circle. *In Proceedings of ICERI 2010, International Conference of Education, Research and Innovation* (pp. 6477-6486). November 15, 16 and 17, 2010, Madrid, Spain

Olver, P. J. (1999). *Classical Invariant Theory*. Series: London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press

Resnick, M. (1997). *Mathematics as a science of patterns*. Oxford: Clarendon Press.

Rollick, M. B. (2009). Toward a definition of reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14, 396-398

Sardar, Z., Ravetz, J., & Van Loon, B. (2015). *Introducing Mathematics: A Graphic Guide.* London: Icon Books Ltd

Sriraman, B. (2009). Mathematical paradoxes as pathways into beliefs and polymathy: An experimental inquiry. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 41, 29-38

Sinitsky, I., & Ilany, B-S. (2009). Conceptions of variance and invariance as a possible passage from early school mathematics to algebra. *Proceedings of CERME 6* (pp. 639- 648). Lyon France, January 28th -February 1st 2009

Thaqi, X., Gimenez, J., & Rosich, N. (2011). Geometrical transformations as viewed by prospective teachers. In *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 578-587). Rzeszów, February, 2011

Wilhelm, H. (1973.) *Change: Eight Lectures on the "I Ching"*. Bollingen Series LXII, Princeton University Press

Wittmann, E. C. (2005). Mathematics as the Science of Patterns – a guideline for Developing Mathematics Education for Early Childhood to Adulthood. *Plenary Lecture at International Colloquium 'Mathematical learning from Early Childhood to Adulthood.* Mons/Belgium, July, 7-9

Zorin, B. (2011). *Geometric Transformations in Middle School Mathematics Textbooks*. Ph. D Dissertation. Graduate School Theses and Dissertations. University of South Florida. Retrieved March 20, 2015, from http://scholarcommons.usf.edu/etd/3421

Corbalan, F., & Sanz, G. (2012). *Η κατάκτηση της μαθηματικής πιθανότητας.* (Μτφρ. Multimedia A.E). Αθήνα: Τέσσερα Πι

Δρόσος, Κ. (1999). *Εισαγωγή στη μαθηματική Σκέψη. Τόμος 1ος: Μαθηματικές Περιηγήσεις*. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών

Fresan, J. (2012). *Το όνειρο της λογικής. Ο μαθηματικός τρόπος σκέψης και τα παράδοξά του*. (Μτφρ. Θεοδ. Δαρβίρη). Αθήνα: Τέσσερα Πι

Ηλιάδης, Σ. (1992). *Προβολική Γεωμετρία.* Πάτρα: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών

Ζαχαριάδης, Θ., Πόταρη, Δ., & Στουραΐτης, Κ. (2011). *Επιμορφωτικό υλικό για τους καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασίου*. Πράξη «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα). Αθήνα

Flato, M. (1993). *Η ισχύς των Μαθηματικών*. (Μτφρ. Τ. Κυπριανίδης). Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο

García del Cid, L. (2012). *Διάσημοι αριθμοί.* (Μτφρ. Θεοδ. Δαρβίρη). Αθήνα: Τέσσερα Πι

Gardner, H. (1989). *Η μαγεία των παραδόξων.* (Μτφρ. Τασ. Δημητρίου & Γρηγ. Τρουφάκος). Αθήνα: Τροχαλία

Καλογεροπούλου, Α., Γκίκας, Μ., Καραγιαννάκης, Δ. & Λάμπρου Μ. (1992). *Αγγλοελληνικό Λεξικό Μαθηματικών Όρων.* Αθήνα: Τροχαλία

Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ) (2001). *Ευκλείδη «Στοιχεία». Η Γεωμετρία του επιπέδου*. Τόμος Ι. Αθήνα

Κουνιάς, Σ., & Μωυσιάδης, Χ. (1995). *Θεωρία Πιθανοτήτων Ι*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη

Κρόκος, Ι. (2010). *Γραμμική Άλγεβρα.* Αθήνα: Άρνος

Κυλάφης, Π., & Βαμβακούση, Ξ. (2009). Ο ρόλος των Patterns στην ανάπτυξη του πρώιμου Αλγεβρικού Συλλογισμού. Στα *Πρακτικά του 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ)*, (σ. 825-826), Ρόδος, 29-31 Οκτωβρίου 2009

Κωστόπουλος, Γ. (2014). Η ισότητα τριγώνων μέσω της μεθόδου της υπέρθεσης, αντιπαραδειγμάτων και χρήσης Δυναμικής Γεωμετρίας. Στα *πρακτικά του 3ου Πανελλήνιου Εκπαιδευτικού Συνεδρίου Ημαθίας με θέμα: «Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στη διδακτική πράξη»*, Τόμος Γ' (σ. 242-253), Νάουσα 4, 5 & 6 Απριλίου 2014,

Μαστρογιάννης, Α. (2015). Αναλλοίωτα γεωμετρικά μεγέθη και ιδιότητες, ως αποκαλυπτικά δωρήματα Δυναμικών Περιβαλλόντων Γεωμετρίας. *Περιοδικό «Νέος Παιδαγωγός»,* Τεύχος 5, 152-163

Μαστρογιάννης, Α. (2010). *Η …μαθη(μα)τική αποτυχία, ως αρνητικός, διαμορφωτικός παράγοντας σχολικής κουλτούρας, στο Δημοτικό Σχολείο*. Αγρίνιο: Εκδόσεις Πασχέντη

Μαστρογιάννης, Α. (2009). *Στους α…ρυθμούς των Πυθαγορείων για ένα… συστηματικό αριθμητικό ταξίδι*. Αγρίνιο: Εκδόσεις Πασχέντη

Μαστρογιάννης, Α. (2008). Ευκλείδειοι μετασχηματισμοί, για την εύρεση εμβαδών επιπέδων σχημάτων, σε περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας. Στα *πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΕΕΠ-ΔΤΠΕ*, (σ. 295-309), Πειραιάς, 4-5 Οκτωβρίου, 2008

Μαστρογιάννης, Α., & Τρύπα, Α. (2010). Η προοπτική ως διαχρονικός, γεωμετρικός μετασχηματισμός αλλά και ως συγχρονική έκφανση της χωρικής αντίληψης, σε μαθητές Δημοτικού. Στα *Πρακτικά του 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Επιστημών Εκπαίδευσης*, (σ. 54-63, Τόμος Τρίτος), Αθήνα 27, 28, 29 και 30 Μαΐου, 2010

Μπαμπινιώτης, Γ. (2005). *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας*. Β΄ Έκδοση. Αθήνα: Κέντρο Λεξικογραφίας

Μωυσιάδης, Π., & Αντωνίου, Ι. (2015). Σύμπτωση και τύχη. *7η Διεθνής Μαθηματική Εβδομάδα*. Θεσσαλονίκη, 18-22 Μαρτίου 2015.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου. Βιβλίο εκπαιδευτικού*. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη

Singh, S. (1998). *Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά*. (Μτφρ. Ανδρ. Σπανού). Αθήνα: Π. Τραυλός

Σταματάκος, Ι. (1999). *Λεξικόν Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσης*. Αθήνα: Βιβλιοπρομηθευτική

Στρατηγόπουλος, Δ. (1994). *Γραμμική Άλγεβρα Ι*. Αθήνα: Συμμετρία

Τσικοπούλου, Σ. (2007). Ο ρόλος των προτύπων (μοτίβων) στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στα *πρακτικά του 24ου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, Κοζάνη, 2, 3 & 4 Νοεμβρίου 2007

Τύπας, Γ., & Ντάφου, Ε. (2006). *Τα μαθηματικά του Δημοτικού μέσα από τα νέα διδακτικά εγχειρίδια*. Ανακτήθηκε στις 2 Απριλίου 2015, από http://www.pi-schools.gr/programs/epimorfosi/epimorfotiko_yliko/dimotiko/mathimatika.pdf

Weyl, H. (1991). *Συμμετρία*. (Μτφρ. Θεοδ. Ηλιάδης). Αθήνα: Τροχαλία

Χαραλαμπίδου, Γ. (2008*). Η χρήση των λαθών για μια αλάνθαστη διδασκαλία και στις τρεις βαθμίδες εκπαίδευσης*. Διπλωματική εργασία για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης, Πανεπιστήμιο Αθηνών: Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και μεθοδολογία των μαθηματικών»