«Δυναμικός» διδακτικός κύκλος των Μαθηματικών μέσω Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων

Σταυρούλα Πατσιομίτου
spatsiomitou@gmail.com

Μαθηματικός-Ερευνήτρια

Περίληψη. Στην εργασία θα παρουσιαστούν, αποσπάσματα μιας ποιοτικής μελέτης που πραγματοποιήθηκε στην Ελλάδα κατά τη διάρκεια διδακτικού πειράματος, σχεδιασμένου να μελετήσει την επίδραση την οποία έχει η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού των μαθητών. Η περιγραφή της δράσης της παρούσας εργασίας θεωρητικά στηρίζεται στο «Δυναμικό» Διδακτικό κύκλο των Μαθηματικών, μέσω Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (ΣΟΕΑ) που δημιουργούνται κατά τη διάρκεια κατανόησης των εννοιών σε ένα «δυναμικό» μαθησιακό μονοπάτι. Εξετάζεται το εννοιολογικό πλαίσιο του διδακτικού κύκλου και επιχειρείται μια επέκταση - αναπροσαρμογή του μοντέλου που προτάθηκε από τον Simon στο τέλος της μελέτης. Ακόμα, για τις ανάγκες της μελέτης μια επέκταση της κατηγοριοποίησης των τετραπλεύρων του Graumann σε συνδυασμό με το θεώρημα Varignon παρουσιάζεται, μέσω της οποίας ιεραρχούνται ειδικότερα τα εσωτερικά τετράπλευρα λόγω των ιδιοτήτων των διαγωνίων του εξωτερικού τετραπλεύρου. Τέλος, συζητείται ο ρόλος των ΣΟΕΑ στη μελέτη και η επέκταση της έννοιας σε άλλα γνωστικά πλαίσια.

Λέξεις κλειδιά: Δυναμικό υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι, Δυναμικός Διδακτικός κύκλος των Μαθηματικών, κατηγοριοποίηση Graumann

Εισαγωγή

Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την ανάπτυξη καινοτόμων προγραμμάτων σπουδών στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες (Smith, Wiser, Anderson & Krajcik, 2006; Corcoran, Mosher & Rogat, 2009; Wilson, 2009) «ως αποτέλεσμα της χρήσης ενός ευρέος πεδίου επιστημονικών μεθοδολογιών, της διατήρησης στενών συνδέσεων μεταξύ προβλημάτων (tasks) και μαθηματικής σκέψης των παιδιών και της ανάπτυξης κάποιου μαθησιακού μονοπατιού, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υποστηρίξει και να οργανώσει τη μάθηση μέσω αυτής της διαδρομής» (Clements & Sarama, 2004, p.82). Όπως υποστηρίζουν οι Corcoran et al. (2009) η διαδικασία αυτή «βασίζεται στην έρευνα για τον τρόπο ανάπτυξης και βελτίωσης της εκμάθησης των μαθητών» (p.8) και αποτελεί «μια υποθετική περιγραφή των διαδοχικών όλο και πιο σύνθετων τρόπων σκέψης σε μια σημαντική περιοχή της γνώσης και της πρακτικής που οι μαθητές αναπτύσσουν [προκειμένου να διεκπεραιώσουν τους στόχους] μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα». (p.37).

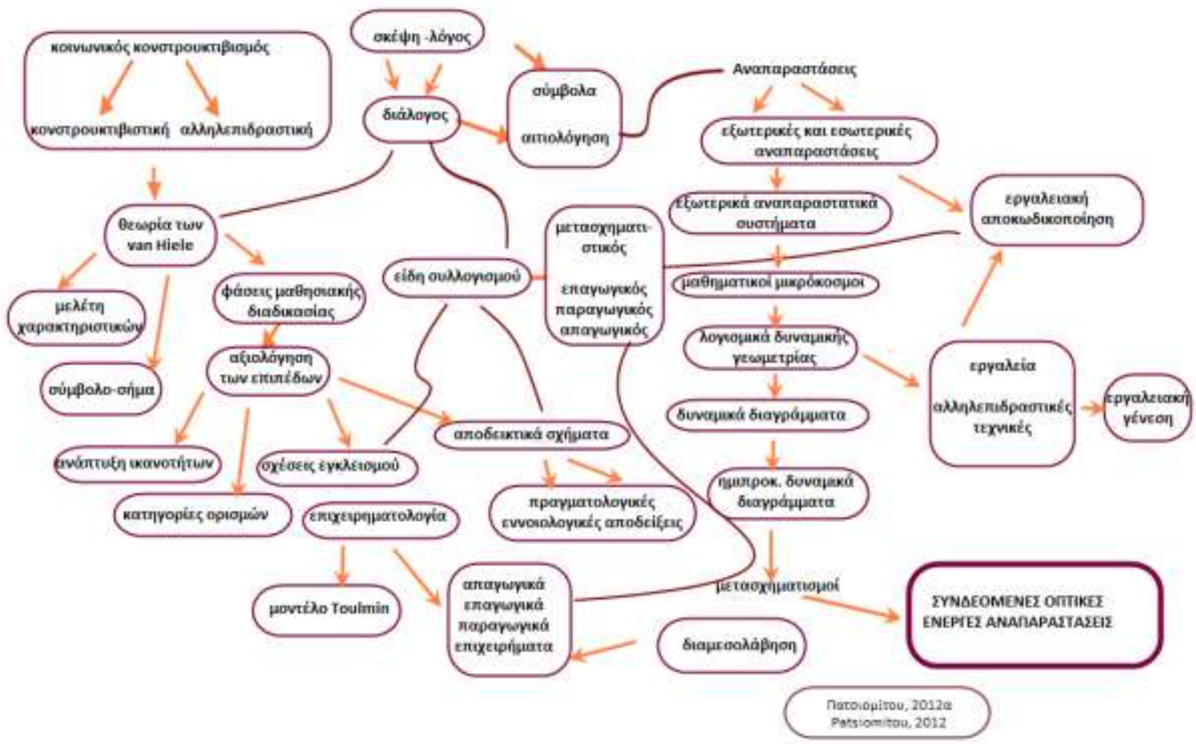
Στην παρούσα εργασία περιγράφεται ένα "υποθετικό" μαθησιακό μονοπάτι, μέσω του οποίου προέκυψε η μάθηση. Το μαθησιακό μονοπάτι περιγράφει πώς οι μαθητές μεταβαίνουν σε εννοιολογική κατανόηση 'κεντρικών ιδεών' (big ideas) στη γεωμετρία (Schifter & Fosnot, 1993), τα επίπεδα σκέψης από τα οποία διέρχονται προκειμένου να αναπτύξουν την κατανόηση και τις δεξιότητες στο θέμα, και τις εκπαιδευτικές δραστηριότητες [π.χ. τα μαθηματικά προβλήματα, τα αρχεία ενός λογισμικού που μεσολαβούν στην εμπειρική κατανόηση των εννοιών] που προσαρμόζονται σε κάθε επίπεδο σκέψης (Clements & Sarama, 2009, p.2).

Είναι γνωστό ότι η εφαρμογή των Μαθηματικών για να λύσουμε καταστάσεις προβλημάτων του πραγματικού κόσμου επισημαίνεται από πολλούς ερευνητές (π.χ Burkhardt, 1981; Pierce & Stacey, 2009; Patsiomitou, 2012; Πατσιομίτου, 2013) ως σημαντική για την ενίσχυση της κατανόησης και μάθησης των μαθηματικών εννοιών. Στις δράσεις που περιγράφονται στη συνέχεια η έννοια στην οποία εστίαζαν οι δραστηριότητες ήταν *των τετραπλεύρων* --όπως αυτά συναντώνται σε πραγματικά αντικείμενα και ειδικότερα σε αντικείμενα που εκτίθενται σε μουσεία-- και η διαδικασία με την οποία δημιουργήθηκαν οι αναπαραστάσεις των μαθητών ήταν *οι μετασχηματισμοί* σε στατικά και δυναμικά μέσα. Οι μαθητές εργάστηκαν στο περιβάλλον του σχολείου, κάνοντας εμπειρικές μετρήσεις, με εργαλεία τους ώστε να αναπαραστήσουν τα σχέδια με υλικά της επιλογής τους (χαρτόνι, κόλλα, ψαλίδι και άλλα) ή δυναμικά μέσα (π.χ υπολογιστικό περιβάλλον, διαδραστικός πίνακας). Για τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων σε υπολογιστικό περιβάλλον σημαντικό ρόλο έπαιξε το περιβάλλον του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991). Για την ανάρτηση του υλικού των δραστηριοτήτων χρησιμοποιήθηκε η πλατφόρμα της ηλεκτρονικής τάξης της ερευνήτριας. Οι μοντελοποιήσεις των μαθητών υποστηρίζονται θεωρητικά από την έννοια της αναπαράστασης και τον τρόπο με τον οποίο αυτοί αντιλαμβάνονται τις αναπαραστάσεις από το περιβάλλον (φυσικό ή φηφιακό), πώς τις χρησιμοποιούν και επικοινωνούν μεταξύ τους αλλά και πώς οι ίδιοι διαχειρίζονται τις μαθηματικές δομές νοητικά ώστε να τις αναπαραστήσουν. Σύμφωνα με τον Vergnaud (1987) «οι αναπαραστάσεις είναι ένα σημαντικό στοιχείο στη θεωρία της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών… [αφού κυρίως] παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση του πραγματικού κόσμου». Ειδικότερα, τα προβλήματα πραγματικού πλαισίου που επιλέχθηκαν, σχεδιάστηκαν ή ανασχεδιάστηκαν μέσω *συνδεόμενων οπτικών ενεργών αναπαραστάσεων* σε περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad. Οι *συνδεόμενες οπτικές ενεργές αναπαραστάσεις* (Πατσιομίτου, 2012α; β; 2015; Patsiomitou, 2008a; b; 2010; 2012) είναι τα διαδοχικά δομικά βήματα των δυναμικών αναπαραστάσεων ενός προβλήματος ή μεταξύ προβλημάτων που επαναλαμβάνουν τα ίδια διαδικαστικά βήματα ή βήματα που αποκαλύπτουν την ίδια διαδικαστική δραστηριότητα ή βήματα που αντιστρέφουν μια διαδικασία, στο ίδιο πρόβλημα ή σε διαφορετικά προβλήματα, στην ίδια φάση ή μεταξύ διαφορετικών φάσεων ενός *υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού*. Αυτά τα βήματα αποκαλύπτουν μια συνεχώς αυξανόμενη δομική πολυπλοκότητα λόγω της εννοιολογικής και δομικής σύνδεσης των μετασχηματιστικών βημάτων του χρήστη στο λογισμικό (δασκάλου ή μαθητή), ενέργειες που προκαλούνται μέσω των τεχνικών του λογισμικού με στόχο να εξωτερικεύσουν τα μετασχηματιστικά βήματα που έχει οπτικοποιήσει νοητικά (ή που υπάρχουν στο νου του) ή που οργανώνει ως αποτέλεσμα της ανάπτυξης της σκέψης και της κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών.

Σκοπός της εργασίας είναι να προβάλει παραδείγματα που περιέχουν πλούσιο μαθηματικό υλικό, έτσι ώστε η μαθηματική μοντελοποίηση να αποτελέσει το μέσο για την ενίσχυση της αποκωδικοποίησης της εννοιολογικής γνώσης και των μαθηματικών ιδεών των μαθητών.

Πώς αναπτύσσεται η σκέψη των μαθητών; Ποιος ο ρόλος των τεχνουργημάτων (artefacts) στη διαδικασία ανάπτυξης σκέψης;

Κατά τη διάρκεια των περασμένων δεκαετιών οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι μαθητές δεν αποδίδουν στο αντικείμενο της Γεωμετρίας (βλ. ενδεικτικά Fuys et al. 1984, 1988). Σε αυτό συντελούν η δυσκολία των μαθητών «να απελευθερώσουν τη σκέψη τους από το εξειδικευμένο πλαίσιο» (White & Mitchelmore, 2010, p. 206), να αναπτύξουν τον «παραγωγικό συλλογισμό» (Peirce, 1998/1903) και την «αφαιρετική ικανότητα» (ενδεικτικά Skemp, 1986; White & Mitchelmore, 2010) που απαιτείται στη δομή ανάπτυξης του περιεχομένου του Προγράμματος Σπουδών της Γεωμετρίας, όπως αυτή παρουσιάζεται μέσω της διδασκαλίας στην τάξη.



Σχήμα 1: Διάγραμμα που αποτυπώνει συνδέσεις θεωριών οι οποίες αξιοποιήθηκαν στη σχεδίαση του μαθησιακού μονοπατιού.

Το διάγραμμα επάνω αποτυπώνει το σύνολο των θεωριών που η ερευνήτρια αξιοποίησε προκειμένου να σχεδιάσει το υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι της παρούσας εργασίας. Το υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι βασίζεται θεωρητικά στην έννοια του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού (social constructivism), σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι μια σύνθετη διαδικασία, όντας ταυτόχρονα κονστρουκτιβιστική και αλληλεπιδραστική (ενδεικτικά αναφέρονται Cobb, Yackel & Wood 1989; Jaworski, 2003). Σύμφωνα με τον Piaget (1937/1971) η γνωστική ανάπτυξη ενός μαθητή εξαρτάται από τη βιολογική του ωρίμανση. Η διαπίστωση ότι η γνωστική ανάπτυξη ενός μαθητή εξαρτάται περισσότερο από τη διδασκαλία έγινε για πρώτη φορά κατά τη διατύπωση της θεωρίας των επιπέδων γεωμετρικής ανάπτυξης των van Hiele, στις αντίστοιχες διδακτορικές διατριβές της Dina van Hiele-Geldof και του συζύγου της Pierre van Hiele, το 1957 (Fuys, Geddes & Tischler, 1988). Η Dina van Hiele (Fuys et al., 1984) θεωρεί ότι «η εργασία πάνω στα γεωμετρικά μοντέλα και ειδικότερα, η κατασκευή σχεδίων (drawings) και σχημάτων (constructions), οδηγεί στην απόκτηση ενός συστήματος σημάτων για αυτά τα σύμβολα» (p. 207). Δηλαδή, ο μαθητής μετασχηματίζει το *χαρακτήρα συμβόλου* των σχημάτων σε *χαρακτήρα σήματος, αναπτύσσοντας τη σκέψη του*.

Ο Battista (2007) μετά από μια ενδελεχή μελέτη των επιπέδων van Hiele τα διαχωρίζει σε επίπεδα και υποεπίπεδα ως ακολούθως: Οπτικοποίηση ή Αναγνώριση (Επίπεδο 1), Ανάλυση (Επίπεδο 2), Θεωρητικό επίπεδο-Άτυπος παραγωγικός συλλογισμός (Επίπεδο 3), Τυπικός-Παραγωγικός συλλογισμός (Επίπεδο 4).Τα υποεπίπεδα μεταξύ των επιπέδων προσδιορίζουν τη γνωστική ανάπτυξη ενός μαθητή/-τριας, μέσω της ανάπτυξης αφαιρετικών ικανοτήτων. Η σύνθετη αλληλεπίδραση μεταξύ σκέψης και γλώσσας διατυπώθηκε από τον Vygotsky (1987), ο οποίος ισχυρίζεται ότι το ένα προκαλεί και παρακινεί την ανάπτυξη του άλλου. Με τη συμμετοχή του ο μαθητής σε μια μαθηματική συζήτηση κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών εννοιών στην τάξη «μαθαίνει να σκέφτεται με μαθηματικό τρόπο» (Sfard, 2001, p. 4). Σύμφωνα με την Sfard (2001) «*η σκέψη είναι η ειδική δραστηριότητα της επικοινωνίας, όταν αναφερόμαστε σε επικοινωνία μέσω λέξεων, εικόνων ή σε άλλη μορφή συμβόλων, καθώς η σκέψη μας είναι μια διαλογική προσπάθεια μέσω της οποίας επιχειρηματολογούμε*» (p.3). Συνεπώς, η μάθηση ορίζεται ως η ανάπτυξη ικανότητας διαλεκτικών δεξιοτήτων και επίλυσης προβλημάτων που δεν ήταν δυνατόν να λυθούν στο παρελθόν ή με άλλα λόγια η αλλαγή των τρόπων που *σκεφτόμαστε* και το πώς ανταλλάσουμε αυτή τη σκέψη. Με βάση αυτή τη θεώρηση, η ανάπτυξη της σκέψης επέρχεται μέσα από τον διάλογο που αναπτύσσει τόσο το υποκείμενο με τον εαυτό του εσωτερικά (ενδοπροσωπικού) όσο και τα άτομα μεταξύ τους στα πλαίσια μιας ομάδας (διαπροσωπικού) (Πατσιομίτου, 2012α).

Από την άλλη, έχει διαπιστωθεί ότι η ανάπτυξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των μαθητών είναι αποτέλεσμα της ανάπτυξης ικανοτήτων (ενδεικτικά Niss, 1999), όπως: *Οπτικοχωρική ικανότητα, Αναπαραστατική ικανότητα, Ικανότητα μαθηματικών συμβόλων, Ικανότητα μαθηματικής σκέψης, Ικανότητα ανάπτυξης εικασιών, γενίκευσης και αποδεικτικών διαδικασιών κ.λπ)*. Επομένως, συμπεραίνεται ότι στόχος της διδασκαλίας των μαθητών είναι η ανάπτυξη ικανοτήτων η οποία μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης.

Ποιος όμως είναι ο ρόλος των τεχνουργημάτων και εργαλείων που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των εννοιών; Η διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών στην τάξη είναι μια κοινωνικοπολιτισμική δραστηριότητα (Vygotsky, 1978; Wertsch, 1998) στην οποία τα υλικά και ψυχολογικά 'εργαλεία' [π.χ σημεία, σύμβολα, τύποι] παίζουν σημαντικό ρόλο ως διαμεσολαβητές της διαδικασίας κατασκευής των μαθηματικών εννοιών και ειδικότερα των γεωμετρικών εννοιών. Με την άποψη αυτή συμφωνεί η Kozulin (1998) η οποία ισχυρίζεται ότι οι υψηλότερου επιπέδου νοητικές λειτουργίες [στις ανώτερες ψυχολογικές λειτουργίες περιλαμβάνεται η *γλωσσική λειτουργία* ενώ στις κατώτερες, η *αντίληψη* (Kozulin, 1998)] είναι απόρροια μιας κοινωνικοπολιτισμικής δραστηριότητας. Το εργαλείο του λογισμικού τότε δρα ως ψυχολογικό εργαλείο, κατευθύνει τον τρόπο σκέψης του μαθητή (Sáenz-Ludlow & Athanasopoulou, 2008) και βοηθά την ανάπτυξη ανώτερων ψυχολογικών λειτουργιών με την έννοια του Vygotsky (1978) που έχουν άμεση σχέση με την κατανόηση της έννοιας. Ο μαθητής αλληλεπιδρά με το εργαλείο για την κατασκευή ενός σχεδίου, παράγεται επομένως μια *ανώτερη ψυχολογική λειτουργία* και το εργαλείο μετασχηματίζεται σε *ψυχολογικό εργαλείο* υπό την έννοια του Vygotsky. Ο Trouche (προσωπική επικοινωνία 2-4 Απριλίου 2008) χαρακτηρίζει τη διαδικασία εργαλειακής γένεσης «ως μια αμφίδρομη διαδικασία μεταξύ των υποκειμένων και των τεχνουργημάτων (συμπεριλαμβανομένων των νοητικών κατασκευασμάτων) με κοινωνικές πτυχές, αναπτυσσόμενη μέσω ολοκληρωμένων/ οριστικοποιημένων δράσεων εντός ή εκτός των τάξεων». Σύμφωνα με τον Trouche «κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της εργαλειακής γένεσης ένα τεχνούργημα (artefact) μετασχηματίζεται σε όργανο (instrument) προσανατολισμένο από ολοκληρωμένες δράσεις και βοηθούμενο από εργαλειακές ενορχηστρώσεις σε σχέση με το υποκείμενο και το στόχο που το υποκείμενο θέλει να υλοποιήσει μέσω του εργαλείου» (προσωπική επικοινωνία, ό.π.).

Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ως εργαλείο /τεχνούργημα διαμεσολαβεί

- μεταξύ του γεωμετρικού προβλήματος και της κατασκευής του σχεδίου ή σχήματος στην οθόνη διευκολύνοντας την κατανόηση ή και την αναθεώρηση των υπονοούμενων γεωμετρικών σχέσεων μέσα στο *πεδίο εμπειρίας* (Boero et al., 1995) των γεωμετρικών κατασκευών του λογισμικού.
- στην αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλου-μαθητή και της γεωμετρικής δραστηριότητας. Κατά την ανάπτυξη της δραστηριότητας, οι ενέργειες του μαθητή, οι ενέργειες του δασκάλου ή άλλα γεγονότα μπορούν να προκαλέσουν μια αλλαγή στις σχέσεις που χαρακτηρίζουν την ίδια τη δραστηριότητα.

Η επίλυση του προβλήματος αποτελείται από διαδοχικές σχηματοποιήσεις σε διαδοχικές σελίδες, οι οποίες είναι συνδεδεμένες γνωστικά και όχι κατ' ανάγκη κατασκευαστικά. Η διαδικασία είναι συνδεδεμένη με τις στρατηγικές για την επίλυση του προβλήματος ή την πρόβλεψη των διαφορετικών μονοπατιών που οδηγούν στην επίλυση σχετικών με διαδικασίες σκέψης.

Ο «Διδακτικός κύκλος των Μαθηματικών»

Η περιγραφή της δράσης της παρούσας εργασίας θεωρητικά στηρίζεται στο «Διδακτικό κύκλο των μαθηματικών» (Simon, 1995). Ο «Διδακτικός κύκλος των Μαθηματικών» (The Mathematics Teaching Cycle) (Simon, 1995) είναι ένας εννοιολογικός όρος/ (ή εννοιολογικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε) που περιγράφει τη σχέση της γνώσης και του σχεδιασμού του δασκάλου με την αλληλεπίδραση του δασκάλου με τους μαθητές. Οι τρεις κύριες συνιστώσες του μαθηματικού διδακτικού κύκλου σύμφωνα με τον Simon (1995) είναι:

- η αξιολόγηση του τι γνωρίζουν οι μαθητές (δηλαδή η επιλογή των μεθόδων για την επίλυση των προβλημάτων και τον τρόπο που οι μαθητές μοιράζονται τις ιδέες τους μέσα στο περιβάλλον της τάξης, πώς αναστοχάζονται στα μαθηματικά καθώς και πώς η μάθηση πληροφορεί ακόμα και για τη γνώση του ίδιου του εκπαιδευτικού) (Edgington, 2009, p.372)·
- ο προσδιορισμός του μαθησιακού και διδακτικού στόχου και των μαθηματικών εννοιών καθώς και η υπόθεση ενός μονοπατιού μέσω του οποίου οι μαθητές πρόκειται να κατανοήσουν την έννοια (πρόβλεψη πώς η σκέψη και η κατανόηση των μαθητών θα προκύψουν μέσα από το πλαίσιο των μαθησιακών δραστηριοτήτων)·
- η σχεδίαση, που βασίζεται τόσο στις ίδιες τις γνώσεις του δασκάλου για το αντικείμενο όσο και στη γνώση του για την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών, για τη δημιουργία ενός υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού και την εφαρμογή των δραστηριοτήτων στην τάξη. Στο τέλος αυτού του βήματος ο κύκλος συνεχίζει ξανά με το πρώτο βήμα (p.136).

Ο διδακτικός κύκλος των μαθηματικών του Simon μπορεί να θεωρηθεί το πρίσμα υπό το οποίο αντιμετωπίζεται το φαινόμενο (Edgington, 2009, p.371) και στην παρούσα μελέτη, το μέσο για τη σχεδίαση δραστηριοτήτων στο γεωμετρικό περιβάλλον του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας που θα οδηγήσει στην ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών, οι οποίες περιγράφονται στη συνέχεια.

Πειραματική διαδικασία σε τάξη

Η μεθοδολογία της πειραματικής διαδικασίας που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία μπορεί να «περιγραφεί ως συστηματική, αναστοχαστική σπείρα σχεδιασμού (προγραμματισμού), των ενεργειών και της παρατήρησης» (Steketee, 2004, p. 876). Ο συνδυασμός αναστοχασμού και πρακτικής έρευνας είναι η καλύτερη μέθοδος για τη βελτιστοποίηση των πρακτικών των εκπαιδευτικών και έχει τις ρίζες του στον Dewey (1933) ο οποίος και εισήγαγε την αναστοχαστική σκέψη (reflective thought) στο εκπαιδευτικό πλαίσιο. Τόσο το προϊόν όσο και η διαδικασία είναι αναγκαίο να εξετάζονται μαζί όταν προσπαθούμε να βελτιώσουμε την πρακτική, ώστε να προκαλέσουμε αλλαγές «που είναι επωφελείς για τους συμμετέχοντες σε αυτή» (Ιωσηφίδης, 2008, σ. 146). Αυτός ο τύπος του αναστοχασμού, «που συνδυάζει μαζί την έρευνα και τη δράση προβλέπει μια συνεχή διαδικασία ανάδρασης από την πλευρά του ερευνητή» (Ιωσηφίδης, 2008, σ. 146), κεντρικό χαρακτηριστικό αυτού που ο Schön's (1983) έχει ονομάσει αναστοχαστική πρακτική (reflective practice) και άλλοι ονομάζουν έρευνα δράσης (action research).

Η διαδικασία που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια εξελίσσεται κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς και αναλύει μη συνηθισμένα πραγματικά προβλήματα σε συσχέτιση με τις εργασίες των μαθητών, οι οποίες προέκυψαν στη διαδικασία επεξεργασίας των προβλημάτων. Η ερευνήτρια ήταν και δασκάλα των παιδιών και η δημιουργός των δραστηριοτήτων του μαθησιακού μονοπατιού, οι οποίες είχαν στόχο τη μάθηση των παιδιών και την ανάπτυξη του επιπέδου σκέψης τους. Η δομή των δραστηριοτήτων του μαθησιακού μονοπατιού βασίζεται στη δομή του μαθησιακού μονοπατιού της διδακτορικής διατριβής της ερευνήτριας, στην οποία η λεπτομερειακή ανάλυση των λεκτικών, εικονικών και συμβολικών αναπαραστάσεων των συμμετεχόντων μαθητών καταδεικνύει την ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης. Τα υποκείμενα της μελέτης ήταν μαθητές της Β τάξης του Γυμνασίου ηλικίας 13-14 ετών. Οι πειραματικές διδασκαλίες που περιγράφονται στη συνέχεια επαναλαμβανόντουσαν κάθε σχολική χρονιά με σχετικά αποτελέσματα. Οι μαθητές αξιολογούνταν ως προς την ικανότητα τους αναφορικά με τους δυο τύπους μαθηματικοποίησης (mathematization) την οριζόντια και την κάθετη, δηλαδή: (α) την ικανότητα μοντελοποίησης του προβλήματος από τον πραγματικό κόσμο στο δισδιάστατο επίπεδο χαρτιού –μολυβιού καθώς και (β) την ικανότητα να οδηγηθούν σε διαδικασίες που απαιτούν υψηλότερο επίπεδο αφαιρετικότητας (Drijvers, 1999). Στη συνέχεια συγκεντρωνόταν το υλικό για να διαπιστωθεί το επίπεδο κατανόησης των μαθητών. Η διαδικασία συνέχιζε με δραστηριότητες στο περιβάλλον του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, στις οποίες αναμορφωνόταν η δραστηριότητα σύμφωνα με τις ανάγκες των μαθητών. Στη συνέχεια επαναλαμβανόταν η αξιολόγηση τους στο περιβάλλον χαρτιού-μολυβιού για να επανεξεταστεί η διαφορά στην κατανόηση λόγω της επίδρασης των δραστηριοτήτων στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας.

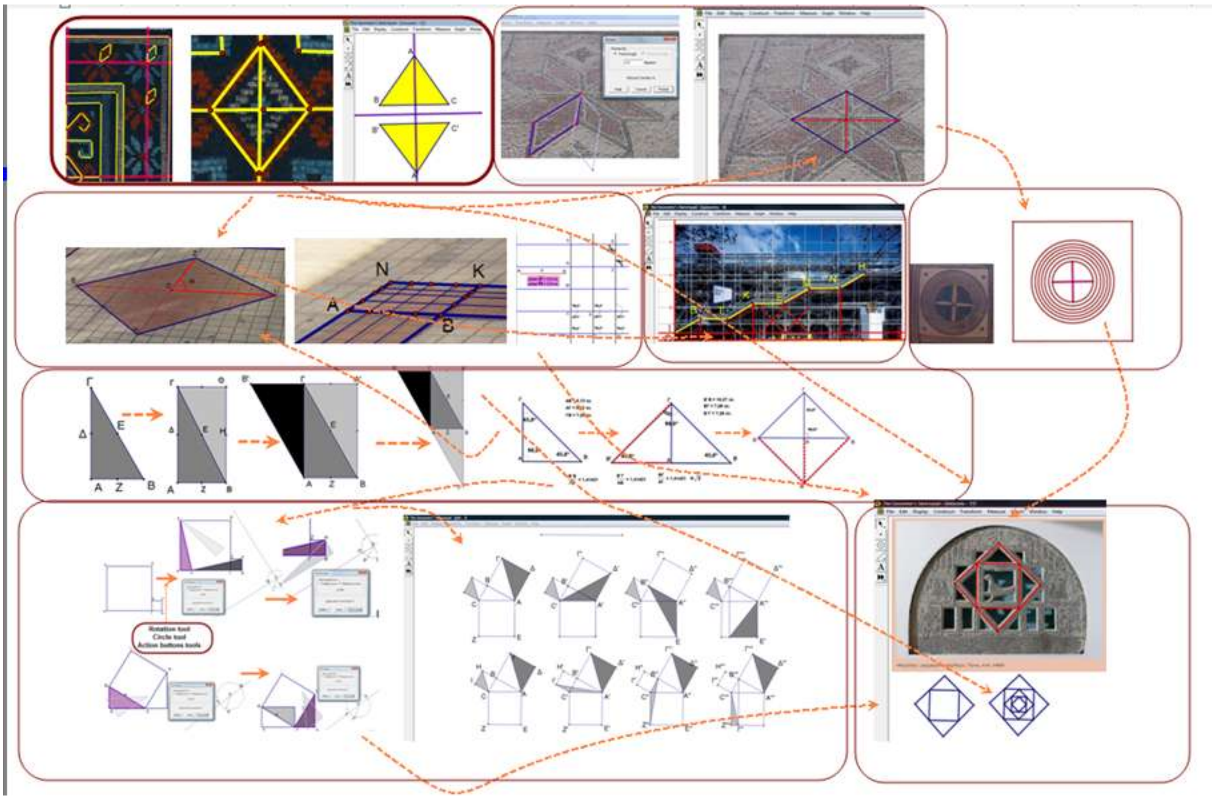
Οι καταστάσεις που οι μαθητές θεωρούν προβληματικές έχουν διάφορους τύπους και προκύπτουν συνήθως όταν οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν μια κατάσταση βασισμένοι σε προϋπάρχουσες γνώσεις εννοιών και διαδικασιών, όταν διατυπώνουν τη μαθηματική τους σκέψη προσπαθώντας να εξηγήσουν τη λύση που οι ίδιοι έχουν ανακαλύψει ή έχει ανακαλύψει κάποιος συμμαθητής τους (Cobb & Steffe, 1983). Τα προβλήματα παρουσιάζονταν μοντελοποιημένα στο δυναμικό περιβάλλον ή αφηνόταν στο μαθητή η διαχείριση της εικόνας που εκλάμβανε από το φυσικό περιβάλλον (Πατσιομίτου, 2013). Η ερευνήτρια συμμετείχε στις δράσεις, ξεκινώντας τη δραστηριότητα με ακολουθιακές ερωτήσεις. Οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν μια προσομοίωση της εικόνας του προβλήματος σε στατικό, ψηφιακό ή άλλο υλικό μέσο, ως μοντέλο του φυσικού περιβάλλοντος ή να διαχειριστούν την ψηφιακή εικόνα προκειμένου να ανακαλύψουν τις ιδιότητες του σχήματος. Σε άλλες περιπτώσεις, να διερευνήσουν το σχήμα του φυσικού περιβάλλοντος και στη συνέχεια να κατασκευάσουν το μοντέλο υπό κλίμακα. Η ψηφιακή εικόνα μπορεί να παίξει ενισχυτικό ρόλο στην κατανόηση των ιδιοτήτων του σχήματος ή να φέρει στην επιφάνεια τα γνωστικά εμπόδια των μαθητών και κατά συνέπεια να οδηγήσει σε λάθη. Τα λάθη αυτά οφείλονται κυρίως στο επίπεδο van Hiele τους (δηλ. στο επίπεδο γεωμετρικής ανάπτυξης το οποίο από μαθητή σε μαθητή μπορεί να διαφέρει). Έτσι οι μαθητές μπορεί να έχουν ικανότητα ή όχι αναγνώρισης των ιδιοτήτων του σχήματος, εφαρμογής των σχετικών κανόνων και γενικότερα ανάπτυξης της λύσης του προβλήματος με παραγωγικό συλλογισμό.

Για τις ανάγκες της μελέτης η ερευνήτρια εφάρμοσε το αναπροσαρμοσμένο διάγραμμα μελέτης των μαθησιακών περιόδων και φάσεων (Πατσιομίτου, 2012α, σελ.63) που είχε κατασκευαστεί από την Teppo (1991), λαμβάνοντας υπόψη τη κατηγοριοποίηση του Battista (2007) και τις έννοιες του Parsysz (1988) περί σχεδίου και σχήματος.

Οι δράσεις του υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού διεξήχθησαν σε φάσεις όπως αποτυπώνονται στο παρακάτω σχήμα [Σχήμα 2], όπου έχουν συνδεθεί ενδεικτικά διαφορετικές οπτικές αναπαραστάσεις στο ψηφιακό ή μη περιβάλλον προκειμένου να υπάρξει εννοιολογική σύνδεση μεταξύ των εννοιών.

- Δράση 1η: Αναγνώριση τετραπλεύρων και της συμμετρίας τους σε πραγματική εικόνα σε αντικείμενα του Μουσείου Λαϊκής τέχνης
- Δράση 2η: Εμπειρικές μετρήσεις τετραπλεύρων στον προαύλιο χώρο του σχολείου
- Δράση 3η: Μετασχηματισμοί στα τετράπλευρα με ψηφιδωτά της Στοάς Αττάλου
- Δράση 4η: Δομική ανάλυση των τετραπλεύρων με αξιοποίηση των αγγείων του Μουσείου της Αρχαίας Αγοράς
- Δράση 5η: Επανάληψη των τετραπλεύρων [Varignon] στο εσωτερικό του Τηνιακού ευρήματος

Αυτό που επισημάνθηκε ήταν ο τρόπος που οι μαθητές αποκωδικοποίησαν τα αντικείμενα σε στατικό ή ψηφιακό περιβάλλον. Στην ουσία πρόκειται για μετατροπή της εικόνας του φυσικού περιβάλλοντος σε εικόνα στο δυναμικό περιβάλλον ή στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι, η οποία όμως υφίσταται μια νοητική επεξεργασία και μετατροπή ενός νοητικού μοντέλου σε πραγματικό, δηλαδή μιας νοητικής αναπαράστασης σε εξωτερική. Η διαδικασία της αποκωδικοποίησης των ενεργειών στο λογισμικό, χρησιμοποιώντας τα πρωτότυπα του λογισμικού, τις λειτουργίες κ.λπ. είναι η διαδικασία με την οποία ο μαθητής μεταφράζει μια εικόνα που έχει σχηματίσει νοητικά για ένα μαθηματικό αντικείμενο με εργαλεία του λογισμικού. Οι μαθητές εξωτερικεύουν στην οθόνη κατασκευές που έχουν σχηματίσει νοητικά, χρησιμοποιώντας τα πρωτότυπα γεωμετρικά αντικείμενα του λογισμικού και τα εργαλεία ή εντολές του μενού, προσπαθώντας να αποκωδικοποιήσουν τις νοητικές τους αναπαραστάσεις σε ενέργειες στο λογισμικό. Επομένως, *αποκωδικοποιούν εργαλειακά*, δηλαδή αποκτούν την ικανότητα να μεταφράσουν ένα σχήμα με την χρήση εργαλείων του λογισμικού. Το πώς η ικανότητα των μαθητών *στην εργαλειακή αποκωδικοποίηση* (instrumental decoding) (Patsiomitou, 2011; Πατσιομίτου, 2011) επιδρά στην ικανότητά τους για κατασκευή εννοιών, μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση του πώς η χρήση των εργαλείων εκ μέρους τους παίζει θεμελιώδη ρόλο ως μη *γλωσσική εγγύηση* με την έννοια που έχει η *εγγύηση* (warrant) στο μοντέλο Toulmin (1958/1993).



Σχήμα 2. Εννοιολογικές και διαδικαστικές συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών δραστηριοτήτων

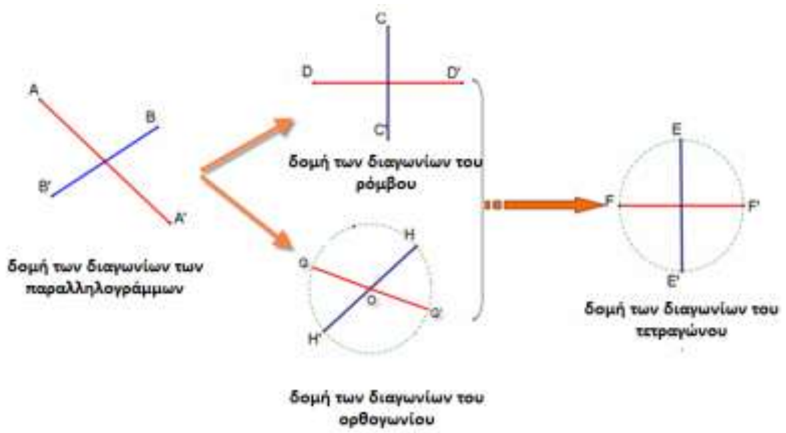
Η αποκωδικοποίηση της διαδικασίας με τα εργαλεία του λογισμικού οδηγεί στην διαμόρφωση εννοιών-εν-δράσει τις οποίες ο μαθητής διατυπώνει με τυπικό, άτυπο ή δυναμικό τρόπο, λόγω του επιπέδου ανάπτυξης της γεωμετρικής του σκέψης. Στον πίνακα κάτω παρουσιάζονται ορισμένες συνδέσεις μεταξύ εργαλείων του λογισμικού και εννοιών της γεωμετρίας (Πατσιομίτου, 2012α).

Πίνακας 1. Εννοιολογικές και διαδικαστικές συνδέσεις

Εργαλείο	**Έννοια**
Εργαλείο σημείου	Έννοια του *δυναμικού σημείου* (Πατσιομίτου, 2011; Patsiomitou, 2011) ως αντικειμένου με ένα, δυο ή μηδέν βαθμούς ελευθερίας.
Εργαλείο συρσίματος	Έννοια του σημείου ως *εξαρτωμένου αντικειμένου*.
Εργαλείο κατασκευής παραλλήλων	Σύνδεση με το *Ευκλείδειο αίτημα.*
Εργαλείο κατασκευής παραλλήλων/ καθέτων	Συνδέουν την *έννοια της καθετότητας* με την *έννοια της παραλληλίας*. (Patsiomitou, 2008a).

Εργαλείο συρσίματος	Έννοια *του τετραγώνου ως ορθογωνίου* με ίσες πλευρές. Γενικότερα προσθήκη ιδιοτήτων (θεωρητικό σύρσιμο) ή διερεύνηση (πειραματικό σύρσιμο) (Patsiomitou, 2012, 2014).
Εργαλείο περιστροφής	Έννοια της *ισότητας των περιστρεφόμενων τμημάτων*(Patsiomitou, 2008a).
Εργαλείο περιστροφής	Έννοια των *συνευθειακών σημείων* με την περιστροφή τμήματος κατά 180^o
Εργαλείο περιστροφής	Έννοια της *ορθής γωνίας* λόγω περιστροφής του ευθυγράμμου τμήματος κατά 90^o και σύνδεση με την έννοια της καθετότητας (Patsiomitou, 2008a).
Εργαλείο ανάκλασης	Σύνδεση της έννοιας του *άξονα συμμετρίας* με την έννοια της *μεσοκαθέτου τμήματος* (Patsiomitou, 2012, 2014).

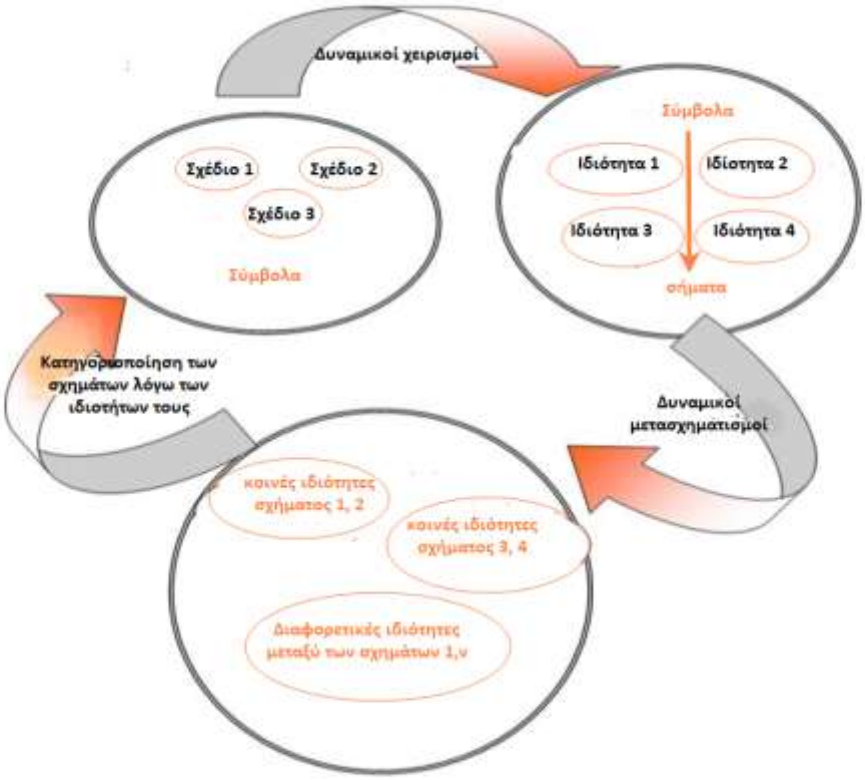
Ένα σημαντικό σημείο της διαδικασίας ήταν η κατασκευή των τετραπλεύρων από τις διαγώνιες τους, με νοητική ανάκληση των ιδιοτήτων τους, ως αποτέλεσμα της διερεύνησης των ιδιοτήτων των διαγωνίων σε προηγούμενη φάση της διαδικασίας. Στη συγκεκριμένη φάση οι μαθητές έπρεπε να αντικαταστήσουν το σχήμα στο μυαλό τους με ένα σύνολο ιδιοτήτων και βάσει αυτών των ιδιοτήτων να κατασκευάσουν το σχήμα. Στο σχήμα 3 μπορούμε να παρατηρήσουμε τις συνδεόμενες οπτικές αναπαραστάσεις των διαγωνίων διαφορετικών παραλληλογράμμων. Η κατασκευή για παράδειγμα δυο τυχαίων διαγωνίων με χρήση του εργαλείου «συμμετρία ως προς κέντρο» (Patsiomitou, 2012) και στη συνέχεια η εφαρμογή άλλων εργαλείων οδηγεί στη διαμόρφωση των διαγωνίων του ρόμβου και του ορθογωνίου, ενώ ο συνδυασμός των εργαλείων στη διαμόρφωση του τετραγώνου με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως.



Σχήμα 3. Εννοιολογικές συνδέσεις μεταξύ συνδεόμενων οπτικών αναπαραστάσεων των διαγωνίων τετραπλεύρων.

Στο σχήμα 4 αποτυπώνεται πώς από τα αρχικά σχέδια των μαθητών με κατάλληλη αλληλεπίδραση μέσω δυναμικών χειρισμών οδηγούνται στο *χαρακτήρα συμβόλου* του σχήματος και στη συνέχεια μέσω δυναμικών μετασχηματισμών στην κατανόηση των κοινών ή μη κοινών ιδιοτήτων των σχημάτων και επομένως το χαρακτήρα σήματος των σχημάτων, το οποίο είναι ένα βήμα πριν την ικανότητα ιεράρχησης τους. Για παράδειγμα, η συνεχής διαμόρφωση ενός πλέγματος τετραπλεύρων (Πατσιομίτου, 2009, σελ. 110-122) στο λογισμικό με χρήση δυναμικών χειρισμών [σύρσιμο] οδηγεί σε διαφορετικές διαμορφώσεις τετραπλεύρων, τα οποία διατηρούν κάποιες ιδιότητες σταθερές.

Οι μετασχηματισμοί των τετραπλεύρων με τη κατάλληλη χρήση των εργαλείων μπορούν να βοηθήσουν το μαθητή να συλλάβει τη διαδοχική σειρά ιεράρχησής τους.

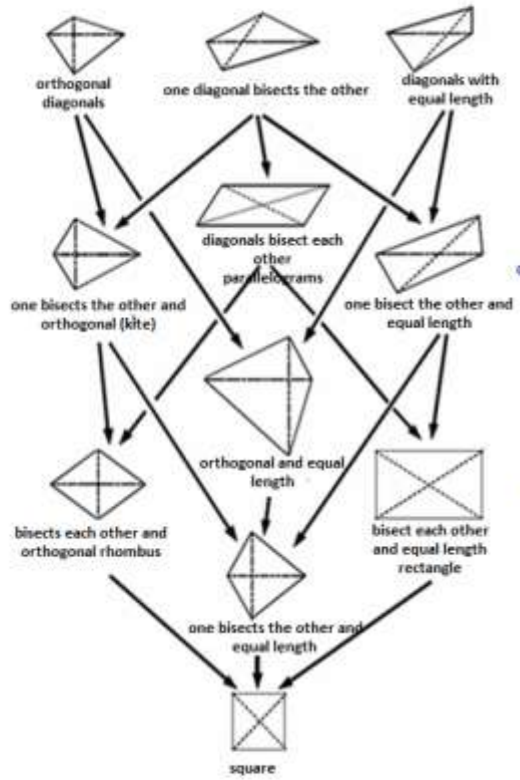


Σχήμα 4. Δυναμικοί χειρισμοί και μετασχηματισμοί που συντελούν στην διαμόρφωση του χαρακτήρα σήματος των σχημάτων.

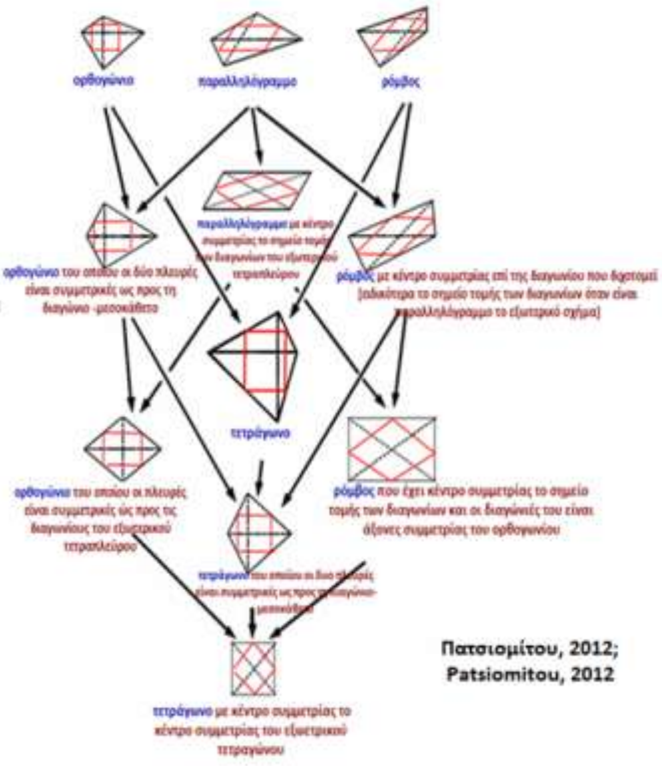
Επομένως, οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο λογισμικό βοηθούν το μαθητή να σχηματίσει ένα ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ του συγκεκριμένου και του αφηρημένου. Τον βοηθούν να αποκωδικοποιήσει τα μαθηματικά σύμβολα και να τα συνδέσει με την προϋπάρχουσα γνώση. Τότε η αντίδραση του στο λογισμικό που περιλαμβάνει τις ενέργειες νοητικές και πραγματικές διευκολύνει στην κατανόηση και τη λύση (Πατσιομίτου, 2012α, σελ. 107).

Η παρατήρηση της κατασκευής του εσωτερικού του σχήματος στο αρχαιολογικό εύρημα της Τήνου (Σχήμα 2,κάτω δεξιά) χρησιμοποιήθηκε ως αφετηρία για να ανακαλύψουν το δίκτυο των σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων των τετραπλεύρων εσωτερικού-εξωτερικού, την κατανόηση του *ρόλου* που παίζουν οι διαγώνιες του τετραπλεύρου (ποιο σχήμα διαμορφώνεται από τα μέσα των πλευρών) στο διάγραμμα του τετραπλεύρου και της ιεράρχησης των τετραπλεύρων λόγω των ιδιοτήτων των διαγωνίων τους (Varignon, 1654-1722 μ.Χ.). Ακόμα την ανακάλυψη υποδομών στην αρχική δομή του. Στο λογισμικό το σύρσιμο και η διαμόρφωση του εξωτερικού τετράπλευρου επηρεάζουν και τη διαμόρφωση του σχήματος του εσωτερικού τετραπλεύρου που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών.

Όπως υποστηρίζουν οι Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strasser (2006), «τα προβλήματα αλλάζουν από τη διαμεσολάβηση του δυναμικού περιβάλλοντος, είτε γιατί η στρατηγική επίλυσης διαφέρει είτε γιατί δεν είναι δυνατά να επιλυθούν εκτός αυτού» (Laborde et al., ibid, p. 293).



Σχήμα 5.Το ‘σπίτι των τετραπλεύρων’ του Graumann (2005)



Σχήμα 6. Αναδιαμόρφωση του ‘σπιτιού των τετραπλεύρων’ του Graumann ώστε να προκύψει κατηγοριοποίηση των εσωτερικών τετραπλεύρων [πρόβλημα Varignon] (Patsiomitou, 2012).

Η ιεράρχηση των τετραπλεύρων του Graumann (2005, p.194) ως προς τις διαγώνιες τους παρουσιάζεται στο σχήμα 5. Ο Graumann (ό.π) διακρίνει τετράπλευρα που έχουν ίσες διαγώνιες, διαγώνιες που τέμνονται κάθετα και διαγώνιες που η μία εξ αυτών διχοτομεί την άλλη [παραλείπεται η περίπτωση τομής των διαγωνίων σε αυθαίρετο σημείο]. Η ιεράρχηση των διαγωνίων συνεχίζεται με την προσθήκη ιδιοτήτων στην καθεμιά από τις αρχικές κατηγορίες μέχρι να οδηγηθούμε στην εξειδικευμένη μορφή του τετραγώνου, του οποίου οι διαγώνιες του είναι ίσες, κάθετες και διχοτομούνται. Ο συνδυασμός της ιεράρχησης κατά Graumann και του θεωρήματος του Varignon οδήγησε σε μια νέα κατηγοριοποίηση των εσωτερικών τετραπλεύρων (Πατσιομίτου, 2012α; Patsiomitou, 2012). Όπως γνωρίζουμε, αν συνδέσουμε τα μέσα των πλευρών κάθε τετραπλεύρου, το σχήμα που προκύπτει στο εσωτερικό είναι ένα παραλληλόγραμμο (Θεώρημα Varignon). Η διαμόρφωση των διαγωνίων του εξωτερικού σχήματος εξειδικεύει τη μορφή του εσωτερικού παραλληλογράμμου.

Έτσι προκύπτει μια νέα κατηγοριοποίηση εσωτερικών παραλληλογράμμων λόγω των διαφορετικών ιδιοτήτων των διαγωνίων του εξωτερικού σχήματος. Για παράδειγμα το τετράπλευρο που προκύπτει από τη σύνδεση των μέσων του τετραπλεύρου που οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα είναι ένα ορθογώνιο. Το τετράπλευρο το οποίο σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιες που διχοτομούνται μεταξύ τους, είναι και πάλι ένα ορθογώνιο του οποίου, όμως, οι πλευρές είναι συμμετρικές ως προς τις διαγώνιες του αρχικού τετραπλεύρου. Στο σχήμα 6 απεικονίζεται μια προσαρμογή της κατηγοριοποίησης του Graumann (2005), μέσω του οποίου ιεραρχούνται ειδικότερα τα τετράπλευρα λόγω των ιδιοτήτων των διαγωνίων τους (Patsiomitou, 2012).

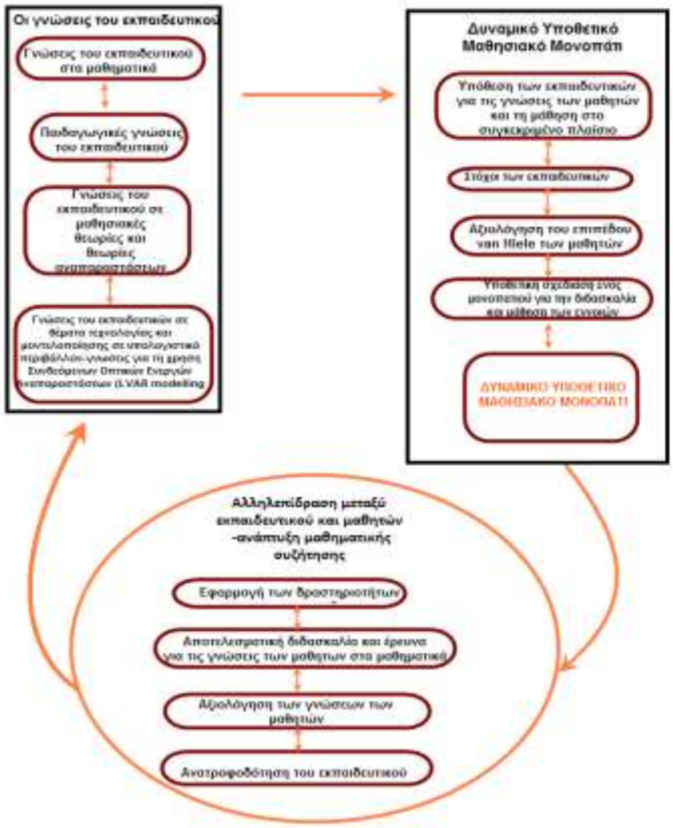
Συμπεράσματα και συζήτηση επί του μαθησιακού μονοπατιού – Επέκταση του Διδακτικού κύκλου των Μαθηματικών

Αν συγκριθεί με την παραδοσιακή προσέγγιση, η διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης των εννοιών με πραγματικά προβλήματα προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα, αφού συνιστά «τη γέφυρα μεταξύ των Μαθηματικών ως εργαλείων για την περιγραφή φυσικών καταστάσεων, αλλά και για την ανάλυση των αφαιρετικών δομών [στα Μαθηματικά του προβλήματος]» (De Corte, Verschaffel & Greer, 2000, p.71). Επομένως, τα προβλήματα πραγματικού πλαισίου αποτελούν το μέσο, αλλά και το εργαλείο, για να αναπτυχθούν μαθηματικές συζητήσεις, οι οποίες θα διαφωτίσουν το πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές ένα μαθηματικό αντικείμενο στο φυσικό περιβάλλον. Η μάθηση των Μαθηματικών μπορεί να επιτευχθεί τότε για τον κάθε (μεμονωμένο) μαθητή μέσω της «συζήτησης, της πραγμάτευσης, της επιχειρηματολογίας» (Jaworski, 2003, p.3) στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης συμπεριλαμβανομένης της ατομικής διαπραγμάτευσης των μαθηματικών εννοιών (Jaworski, 2003). Από την άλλη, οι μαθητές προετοιμάζονται ως πολίτες με κριτική ικανότητα ανάλυσης των δεδομένων του περιβάλλοντος αλλά και εφαρμογών του στην μαθηματική εκπαίδευση. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Gravemeijer (2004), «είναι αναγκαίος ένας εκπαιδευτικός σχεδιασμός που θα υποστηρίξει τη διδασκαλία ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τον τρόπο με τον οποίο αιτιολογούν» (p. 106).

Ο σχεδιασμός και ανασχεδιασμός διδακτικών δράσεων με πραγματικά προβλήματα ή προσομοιώσεις πραγματικών προβλημάτων μέσω συνδεόμενων οπτικών ενεργών αναπαραστάσεων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, καθώς και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα ερευνητικά δεδομένα (Πατσιομίτου, 2012α, β) οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ένας μαθητής αναπτύσσει αφαιρετικές ικανότητες, όταν οι γνωστικές δομές του συνδέονται μέσα από συνδεόμενες αναπαραστάσεις τις οποίες ο μαθητής αναπτύσσει στη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Στις δραστηριότητες της παρούσας εργασίας η κατασκευή των σχημάτων με τη χρήση των εργαλείων του λογισμικού αλλά και των υποκείμενων κανόνων της θεωρητικής γεωμετρίας, ώστε η κατασκευή να είναι σταθερή οδήγησε στις ΣΟΕΑ ενός σχήματος, ή σε ΣΟΕΑ μεταξύ διαφορετικών προβλημάτων/δράσεων. Αναλυτικότερα, συνδεόμενες αναπαραστάσεις μπορεί ο μαθητής να κατασκευάσει όταν ο μαθητής οικοδομεί μια αναπαράσταση (π.χ. ενός παραλληλογράμμου) ώστε να προκύψει μια σταθερή κατασκευή (Patsiomitou, 2012; Πατσιομίτου, 2012α; β).

- εξωτερικεύοντας μια νοητική προσέγγιση ή γενικότερα μετατρέποντας μια εσωτερική αναπαράσταση σε εξωτερική˙
- προσθέτοντας διαδικαστικά στην κατασκευή ώστε το κατασκευαστικό αποτέλεσμα αφενός να οδηγεί στη σύνθεση μιας δομής και αφετέρου να γίνεται όλο και περισσότερο σύνθετο˙

Σχήμα 7: Ο Διδακτικός κύκλος των Μαθηματικών (Simon, 1995, p.136)



Σχήμα 8. Προσαρμογή του Διδακτικού Κύκλου των Μαθηματικών για την παρούσα μελέτη (Patsiomitou, 2014, p.35).

- συνδέοντας εννοιολογικά και διαδικαστικά τα βήματα της κατασκευής

τότε κατασκευάζει εξωτερικά συνδεδεμένες αναπαραστάσεις διαδικαστικά, και εννοιολογικά συνδεδεμένες αναπαραστάσεις εσωτερικά [νοητικά]. Η όλη δράση συνιστά μια καινοτόμο προσέγγιση στην εκπαιδευτική διαδικασία που στηρίζεται σε θεωρητική τεκμηρίωση, καθώς εισάγεται για πρώτη φορά στο σχολείο με αποτέλεσμα να προτείνεται η αναμόρφωση/ανασχεδιασμός μιας καθιερωμένης διδακτικής πρακτικής.

Η ανάλυση των διδακτικών δράσεων και η ανάπτυξη του Διδακτικού κύκλου των Μαθηματικών οδήγησε την ερευνήτρια να αναπροσαρμόσει το διάγραμμα [Σχήμα 8] που έχει δημιουργηθεί από τον Simon (1995, p.136) [Σχήμα 7, μετάφραση του σχήματος (Πατσιομίτου, 2012α)], προκειμένου να ληφθεί υπόψη η χρήση της τεχνολογίας στον διδακτικό κύκλο, η ικανότητα μοντελοποίησης δραστηριοτήτων με συνδεόμενες οπτικές ενεργές αναπαραστάσεις στο λογισμικό και η αξιολόγηση των επιπέδων των μαθητών με τη θεωρία van Hiele. Η επικοινωνία μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών επιτυγχάνεται μέσω της μαθηματικής συζήτησης σε ακολουθιακές δράσεις: εφαρμογή των δραστηριοτήτων, αποτελεσματική διδασκαλία και έρευνα στους μαθητές, διερεύνηση της γνώσης τους η οποία οδηγεί σε ανατροφοδότηση του εκπαιδευτικού για την αναμόρφωση των δραστηριοτήτων.

Διεύρυνση της εφαρμογής σε άλλα γνωστικά αντικείμενα

Η γνώση των υποστηρικτικών μέσων που έχουμε στη διάθεσή μας για το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων μάς επιτρέπει να επιλέξουμε ανάμεσα σε τεχνολογικά εργαλεία, τα οποία αποτελούν εξωτερικά αναπαραστατικά συστήματα. Η μοντελοποίηση επομένως ενός προβλήματος με συνδεόμενες οπτικές ενεργές αναπαραστάσεις στο δυναμικό περιβάλλον μπορεί να 'φέρει' οποιοδήποτε αντικείμενο προς μελέτη στην τάξη. Από την άλλη ένα τεχνολογικό εργαλείο είναι σημαντικό όπως και ο σχεδιασμός τεχνουργημάτων με αυτό, όταν τα αποτελέσματα στη διδακτική χρήση μπορούν να γενικευθούν και να επαναληφθούν σε οποιαδήποτε ομάδα μαθητών, σε διαφορετικές χρονικές περιόδους αλλά και σε οποιοδήποτε θεματικό πλαίσιο (π.χ. στο αντικείμενο της φυσικής ή της χημείας) (Πατσιομίτου, 2012β; Patsiomitou, 2014). Σε γενικές γραμμές το όλο ζήτημα έχει σχέση με τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο -δηλαδή τα φυσικά αντικείμενα- (μη συνειδητά), και πως τα συγκρίνουμε νοητικά (συνειδητά) με θεωρητικά κατασκευάσματα της γεωμετρίας με στόχο την αναπαράσταση τους. Η σύνδεση μεταξύ των δυο χώρων, του αναπαριστώμενου και του αναπαριστώντος, μπορεί να δημιουργήσει εμπλοκές στους μαθητές καθότι δεν έχουν την δυνατότητα του ελέγχου της πληροφορίας που έρχεται από τον αναπαριστώντα χώρο (Mesquita, 1998). Πώς θα μεταβληθεί αυτή η αδυναμία όταν οι μαθητές θα μπορούν να επεξεργάζονται ημιπροκατασκευασμένες δυναμικές αναπαραστάσεις ΣΟΕΑ σε μια επίσημη πλατφόρμα, όπως του Υπουργείου Πολιτισμού, Παιδείας και Θρησκευμάτων; Πόσο θα ενισχυθεί η αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών που θα χειρίζονται αυτή την πλατφόρμα για τους μαθητές τους, αναστοχαζόμενοι πάνω στις γνώσεις τους; Πώς θα επηρεαζόταν, για παράδειγμα, η κατανόηση των μαθητών αν εφαρμοζόταν η ανάπτυξη μιας διδακτικής ενότητας της φυσικής ή των αρχαίων ελληνικών και της ιστορίας με χρήση των ΣΟΕΑ; Μπορούν να αναπτύξουν οι μαθητές δικές τους συνδεδεμένες εννοιολογικά και διαδικαστικά αναπαραστάσεις στα αντικείμενα αυτά; Αυτά τα ερωτήματα πρέπει να απαντηθούν και ίσως αποτελέσουν το επόμενο βήμα για την εξέλιξη της έρευνας σε συνεργασία με τις νευροεπιστήμες.

Σημείωση: Οι δραστηριότητες που αναφέρονται συνοπτικά στην παρούσα εργασία, περιέχονται σε αναλυτική μορφή στην εργασία «Student's learning progression through instrumental decoding of mathematical ideas», όπως αναφέρεται στις βιβλιογραφικές αναφορές στη συνέχεια.

Αναφορές

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In Lester, F. (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 843-908). NCTM. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari P., Ferrero, E., Garuti, R., Parenti, L., & Scali, E (1995). Aspect of the Mathematics-Culture relationship, *Procedings of PME XIX*, Recife, I, 151-166.

Burkhardt, H. (1981). *The real world and mathematics.* Glasgow, UK: Blackie **.**

Carr, W., & Kemmis, S. (1986) Becoming Critical: education, knowledge and action research. Lewes, Falmer.

Clements, D., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2),* 81-89.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Cobb, P. Yackel, E., & Wood, T. (1989): Young childrens emotional acts while doing mathematical problem solving. In: D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 117–148). New York: Springer-Verlag.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education,* 14(2), 83-94.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for living* (pp. 66-73). Amman, Jordan: The National Center for Human Resource Development.

Corcoran, T., Mosher, F. A., & Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science: An evidence-based approach to reform*. (Research Report #RR-63). Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education.

Dewey, J. (1933). *How We Think: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process*. Boston: D.C. Heath.

Drijvers, P. H. M. (1999). Students encountering obstacles using CAS: A developmental-research pilot study. In P. Kent, J. Monaghan, & N. Zehavi (Eds.), *Papers (Presentations, Reactions and Keynotes) of the CAME (Computer Algebra in Mathematics Education) meeting at the Weizmann Institute of Science, Rehovot,Israel, August 1-2, 1999* (pp. 34-49). Available online from http://metric.ma.ic.ac.uk/came/events/weizmann

Edgington, C. (2009). "Teaching mathematics for understanding: The social culture of the classroom". *Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology* Fuys, Geddes & Tischler, 1988.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (Eds). (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* Brooklyn: Brooklyn College. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 287 697).

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*: Monograph Number 3.

Gravemeijer, K. P. E. (2004). *Creating Opportunities for Students to Reinvent Mathematics*. Paper presented at ICME 10, Kopenhagen, Denmark. July 4-11.

Graumann, G. 2005. Investigating and ordering Quadrilaterals and their analogies in space-problem fields with various aspects. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 37*(3), 190-198.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74*, 11-18.

Jaworski, B. (2003). Inquiry as a pervasive pedagogic process in mathematics education development, *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy. Retrieved February 14, 2010, from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3.

Jackiw, N. (1991). The Geometer's Sketchpad [Computer Software].Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Kozulin, A. (1998). *Psychological Tools*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Laborde, C., Kynigos, K. Hollebrands & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education:Past, Present and Future*. Sense Publishers, pp. 275–304.

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 183-195.

Niss, M. (1999). Kompetencer og Uddannelsesbeskrivelse (Competencies and subject description). *Uddanneise , 9*, 21-29.

Piaget, J. (1937/1971). *The construction of reality in the child* (M. Cook, Trans.). New York:Basic Books.

Parzysz, B. (1988). Knowing versus seeing: problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 79–92.

Patsiomitou, S. (2008a). The development of students' geometrical thinking through transformational processes and interaction techniques in a dynamic geometry environment. *Issues* *in Informing Science and Information Technology Journal,* 5, 353-393. Available on line http://iisit.org/IssuesVol5.htm.

Patsiomitou, S., (2008b) Linking Visual Active Representations and the van Hiele model of geometrical thinking. *Proceedings of the 13th Asian Conference in Technology in Mathematics.* pp 163-178. Bangkok, Thailand: Suan Shunanda Rajabhat University. Available on line http://atcm.mathandtech.org/EP2008/pages/regular.htm

Patsiomitou, S. (2010). Building LVAR (Linking Visual Active Representations) modes in a DGS environment. *Electronic Journal of Mathematics and Technology,* 4(1), 1-25.

Patsiomitou, S. (2011). Theoretical dragging: A non-linguistic warrant leading to dynamic propositions. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 361-368. Ankara, Turkey: PME.

Patsiomitou, S. (2012). A Linking Visual Representation DHLP for student's cognitive development. *Global Journal Of Computer Science and Technology*. Online ISSN:0975-4172 & Print: 0975-4350, pp. 53-82, Vol. 12 Issue 6 version 1. March 2012.

Patsiomitou, S. (2013). Students learning paths as 'dynamic encephalographs' of their cognitive development. *International journal of computers & technology* [Online], 4(3) (18 April 2013). http://cirworld.com/index.php/ijct/article/view/1224/0.

Patsiomitou, S. (2014). Student's Learning Progression through Instrumental Decoding of Mathematical Ideas. *Global Journal of Computer Science and Technology*, Vol. 14 Issue 1,pp. 1-42. http://computerresearch.org/stpr/index.php/gjcst/article/view/1619/1482

Peirce, C. S. (1998, c. 1903d). The three normative sciences. In N. Houser & C. Kloesel, (Eds.), *The Essential Peirce: Selected philosophical writings, Volume 2*, 196-207. Bloomington: Indiana University Press.

Pierce, R. & Stacey, K. (2009). *Using dynamic geometry to bring the real world into the classroom*. http://128.250.151.11/sme/research/Pierce_Stacey_GGB.pdf a 19 de Janeiro de 2010.

Sáenz-Ludlow, A., & Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool mediating both geometric conceptualizations and communication. In L. Radford, G. Schubring, and F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture,* 195-214. Rottendam: Sense Publishers.

Sfard, A. (2001). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher, C. Walter (Eds), Proceedings of 21st Conference of PME-NA (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, mathematics, and Environmental Education. http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles(pdf)/sfard.pdf

Schifter, D. & Fosnot, C.T. (1993). *Reconstructing Mathematics Education: Stories of Teachers Meeting the Challenge of Reform*. New York, New York: Teachers College Press

Schön, D. A. (1983). The reflective practitioner: How professionals think in action. New York: Basic Books.

Skemp, R. (1986). The psychology of learning mathematics (2nd ed.) Harmondsworth, UK: Penguin

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114-145.

Smith, C., Wiser, M., Anderson, C., & Krajcik, J. (2006). Implications of research on children's learning for standards and assessment: A proposed learning progression or matter and the atomic-molecular theory. *Measurement, 14(1&2),* 1-98.

Steketee, C. (2004). Action research as an investigative approach within a computer base community of learners. In R. Atkinson, C. McBeath, D. Jonas-Dwyer & R. Phillips (Eds), Beyond the comfort zone: *Proceedings of the 21st ASCILITE Conference* (pp. 875-880).

Teppo, A. (1991). Van Hiele levels of geometric thought revisited. *Mathematics Teacher, 84*, 210-221.

Toulmin, S.E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of the human/machine interaction in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 9,* 281-307. Kluwer Academic Publishers.

Wertsch, J. 1998. *Mind As Action*. NewYork NY: Oxford University Press.
White, P., & Mitchelmore, M. C. (2010). Teaching for abstraction: A model. *Mathematical Thinking and Learning*. 12(3), 205-226.
Wilson, P.H. 2009. A learning trajectory for equipartitioning and curricula: An analysis of *Investigations in Data, Number, and Space* and *Everyday Mathematics.*
Vergnaud, G. (1987). Conclusion. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 227-232). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Vygotsky, L.S. (1987). Thinking and speech. In R.W. Rieber and A.S. Carton (Eds.), *The collected works of L.S. Vygotsky, Volume 1: Problems of general psychology*, (Trans. N.Minick). New York: Plenum.
Ιωσηφίδης, Θ. (2008). *Ποιοτικές Μέθοδοι Έρευνας στις Κοινωνικές Επιστήμες*. Αθήνα: Κριτική (σ. 324) (ISBN 978-960-218-599-5) (Νέα αναθεωρημένη και εμπλουτισμένη έκδοση του βιβλίου: *Ανάλυση Ποιοτικών Δεδομένων στις Κοινωνικές Επιστήμες*, Κριτική, 2003, ISBN 960-218-318-7, σ. 160).
Πατσιομίτου, Σ. (2009). Μαθαίνω Μαθηματικά με το Geometer's Sketchpad. *Εκδόσεις Κλειδάριθμος*, Αθήνα. Τόμος Α. ISBN: 978-960-461-308-3.
Πατσιομίτου, Σ. (2011). Θεωρητικό σύρσιμο. Μη γλωσσική εγγύηση στην ανάπτυξη δυναμικών εννοιών από τους μαθητές. *28ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΜΕ,* σσ.562-574, Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών. https://www.academia.edu/3544047/Θεωρητικό_σύρσιμο._Μη_γλωσσική_εγγύηση_στην_ανάπτυξη_δυναμικών_εννοιών_από_τους_μαθητές
Πατσιομίτου, Σ. (2012α). Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης μέσα από τη χρήση αλληλεπιδραστικών τεχνικών και μετασχηματισμών σε υπολογιστικό περιβάλλον: Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις. Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων (Δεκέμβριος 2012).
Πατσιομίτου, Σ. (2012β). Σχεδίαση και μετασχηματισμοί Συνδεόμενων Οπτικών Αναπαραστάσεων - Εφαρμογή στη διδασκαλία σε τάξη. 8ο *Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή «Οι τεχνολογίες της πληροφορίας και των επικοινωνιών στην εκπαίδευση»* ΕΤΠΕ, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας. http://etpe.eu/custom/pdf/etpe1895.pdf.
Πατσιομίτου, Σ. (2013). Οι μοντελοποιήσεις προβλημάτων πραγματικού πλαισίου σε δυναμικό περιβάλλον μέσο αποκωδικοποίησης της εννοιολογικής γνώσης των μαθητών. Ευκλείδης Γ΄, (79), 107-136.
Πατσιομίτου, Σ. (2015). Η ανάπτυξη ικανότητας εργαλειακής αποκωδικοποίησης νοητικών αναπαραστάσεων των μαθητών ως μη γλωσσική εγγύηση στην ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης. Περιοδικό «ΝΕΟΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΟΣ». 5ο τεύχος, 29-60.