Εμπλοκή των μαθητών σε ένα πρόβλημα εικονιστικής κανονικότητας για την εισαγωγή στην άλγεβρα

Γιώργος Κόσυβας
gkosyvas@yahoo.com

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Α΄ Αθήνας

Περίληψη. Στο πλαίσιο του Νέου Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών του Γυμνασίου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να καταγίνονται με κανονικότητες. Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τις στρατηγικές γενίκευσης των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου κατά τη λύση ενός πραγματικού προβλήματος μιας εικονιστικής κανονικότητας (figural pattern). Το πρόβλημα δόθηκε στους μαθητές στο πλαίσιο πειραματικής διδασκαλίας που πραγματοποιήθηκε από τον Σχολικό Σύμβουλο Μαθηματικών στο 2^{ο} ΠΠ Γυμνάσιο Αθηνών. Συγκεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στις ικανότητες αλλά και στις δυσκολίες των μαθητών να εκμαιεύουν κανονικότητες και δομές και να κάνουν επαγωγικές γενικεύσεις από κατάλληλα εικονιστικά βήματα, να σχηματίζουν συναρτησιακές σχέσεις και εικασίες και να τις αιτιολογούν. Από τα ευρήματα αυτής της έρευνας προέκυψαν δύο είδη στρατηγικών αλγεβρικής γενίκευσης: στρατηγικές δόμησης και αποδόμησης γενικεύσεων. Τέλος μελετούμε τους παράγοντες που συνέβαλαν στην υιοθέτηση των αντίστοιχων στρατηγικών.

Λέξεις κλειδιά: εικονιστική κανονικότητα, αλγεβρική σκέψη, επίλυση προβλήματος, ομαδοσυνεργατική μάθηση, μαθηματική συζήτηση στην τάξη.

Εισαγωγή

Η αλγεβρική σκέψη γενικότερα και η άλγεβρα ειδικότερα διευκολύνουν τους μαθητές να επεξεργάζονται και να παριστάνουν μαθηματικές ιδέες με συντομία, ακρίβεια και σαφήνεια και να αναπτύσσουν αποτελεσματικές διαδικασίες μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων. Ωστόσο, σύμφωνα με τα ερευνητικά ευρήματα η άλγεβρα αποτελεί μια από τις δυσκολότερες περιοχές των σχολικών μαθηματικών (Δραμαλίδης & Σακονίδης, 2006).

Από τη μια πλευρά η άλγεβρα περιγράφεται ως ένα δομημένο σύστημα, το οποίο αποτελείται από τυπικές μαθηματικές προτάσεις και από την άλλη ως «γενικευμένη αριθμητική». Οι επιπτώσεις αυτών των δύο αντιλήψεων στην καθημερινή διδασκαλία της άλγεβρας δεν διαφέρουν: και οι δύο δίνουν προτεραιότητα στις συμβολικές όψεις της άλγεβρας, όπως είναι η χρήση μεταβλητών, η λύση εξισώσεων, η μελέτη συναρτήσεων και η απομνημόνευση κανόνων χειρισμού αλγεβρικών παραστάσεων. Η άλγεβρα χρησιμοποιεί ένα τυποποιημένο σύστημα στο οποίο προεξάρχουν οι γραμματικοί/συντακτικοί κανόνες και η αδυναμία οπτικοποίησης των αφηρημένων αλγεβρικών ιδεών. Μετά την κατάκτηση αυτών των χειρισμών ακολουθεί η εφαρμογή των αλγεβρικών εννοιών στην επίλυση προβλημάτων της πραγματικής ζωής.

Η τυπική συμβολική προσέγγιση της άλγεβρας δέχθηκε τα πυρά έντονης κριτικής από τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών για την έλλειψη νοήματος και θεωρείται ως πηγή των δυσκολιών ιδιαίτερα για τους μαθητές οι οποίοι εισάγονται για πρώτη φορά στην άλγεβρα (Thompson, 2013; Wittmann et al., 2013; Βερύκιος, 2011). Ο κίνδυνος που εγκυμονεί είναι ότι καθώς οι μαθητές βυθίζονται στον αλγεβρικό χειρισμό για την επίτευξη διαδικαστικής άνεσης, μπορεί να χαθεί το νόημα και ο σκοπός τους συμβολικού χειρισμού.

Η Kieran (2007) ταξινομεί τη δραστηριότητα για τη σχολική άλγεβρα σε τρεις τύπους: τη γενεσιουργό (generational) δραστηριότητα, η οποία καταλήγει στη γένεση αλγεβρικών εκφράσεων (π.χ. γενίκευση εικονιστικών μοτίβων), τη μετασχηματιστική (transformational) που αναφέρεται στις διαδικασίες μετασχηματισμού των αλγεβρικών παραστάσεων σε ισοδύναμες (εκτέλεση πράξεων, παραγοντοποίηση πολυωνύμων, λύση εξισώσεων) και τη σφαιρική (global/meta-level), στην οποία η άλγεβρα χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την ευρύτερη μαθηματική δραστηριότητα (επίλυση προβλήματος, μοντελοποίηση, μελέτη των μεταβολών, απόδειξη).

Η μελέτη των κανονικοτήτων συνδέεται στενά με τους τρεις προαναφερόμενους τύπους αλγεβρικής δραστηριότητας. Ειδικότερα οι εικονιστικές κανονικότητες αποτελούν ένα ιδανικό πλαίσιο το οποίο δίνει έμφαση στο μαθηματικό νόημα. Η ικανότητα των μαθητών να βρίσκουν τον κανόνα είναι σημαντική και τους βοηθά να κατανοούν περισσότερα για τη φύση της άλγεβρας από την περίπτωση στην οποία εισάγονται σε αυτήν με τυπικό συμβολικό τρόπο. Επιπλέον, είναι σε θέση να κατανοούν πώς μπορεί να οπτικοποιηθεί η κανονικότητα με διαφορετικούς τρόπους και πώς οι διαφορετικές οπτικοποιήσεις μπορούν να περιγραφούν συμβολικά.

Θεωρητικό πλαίσιο

Η λέξη “κανονικότητα” αποδίδει το περιεχόμενο του αγγλικού όρου pattern και αναφέρεται στον κανόνα που διέπει μια κατάσταση ή ένα φαινόμενο. Ειδικότερα, η εικονιστική κανονικότητα αναφέρεται στον κανόνα με τον οποίο σχηματίζονται ακολουθίες συλλογών από διακεκριμένα εικονιστικά αντικείμενα όπως κουκκίδες, κυκλάκια, τετραγωνάκια, εξάγωνα ή άλλα εικονιστικά αντικείμενα. Ως εικονιστικά αντικείμενα αναφέρονται στοιχεία τα οποία περιέχουν χωρικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες σχέσεων μεταξύ διαδοχικών εικόνων. Οι εικονιστικές κανονικότητες αποτελούνται από βήματα των οποίων τα μέρη δημιουργούνται με έναν καθορισμένο τρόπο. Στα προβλήματα με ακολουθίες κανονικοτήτων (sequences of patterns) συνήθως δίνεται ένα επαρκές πλήθος όρων, από τους οποίους οι μαθητές μπορούν να βρίσκουν τον κανόνα σχηματισμού όλων των όρων και να προβλέπουν το πλήθος των στοιχείων για οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας (Κόσυβας, 2009β; Rivera, 2010).

Υπάρχουν αρκετές μελέτες που ασχολούνται με την ανάπτυξη των κανονικοτήτων σε διάφορα επίπεδα μαθητών, από το Νηπιαγωγείο μέχρι το Λύκειο (Ishida, 1997; Carraher & Schliemann, 2007; Warren & Cooper, 2008; Blanton, 2008; Mulligan & Mitchelmore, 2009). Στην έρευνα διακρίνονται διάφορα είδη κανονικοτήτων όπως αριθμητικές και εικονιστικές κανονικότητες, γραμμικές και τετραγωνικές κανονικότητες, επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα μοτίβα, κανονικότητες με χειραπτικό υλικό ή ψηφιακό λογισμικό, κ.λπ.

Οι ακολουθίες κανονικοτήτων θεωρούνται από πολλούς ως ένας τρόπος προσέγγισης της άλγεβρας (π.χ. Mason et al., 1985; Kieran, 1992; Lee, 1996; Zazkis & Liljedahl, 2002; Lannin et al., 2006; Warren & Cooper, 2007; Walkowiak, 2014; Κολέζα, 2009). Ο αλγεβρικός συλλογισμός αποτελείται από μορφές γενίκευσης μαθηματικών ιδεών με αφετηρία ένα σύνολο ειδικών περιπτώσεων. Η επαγωγή και η γενίκευση αποτελούν θεμελιώδη γνωρίσματα στη μάθηση και τη διδασκαλία της άλγεβρας. Τα γνωρίσματα αυτά υπερέχουν στις κανονικότητες και έχουν υπογραμμιστεί από πολλούς ερευνητές (Lannin, 2005; Radford, 2008; Rivera & Becker, 2008). Η διενέργεια αφαιρέσεων πάνω σε κανονικότητες είναι ένας δρόμος για τη δομημένη γνώση των μαθηματικών (Steen, 1988; Mason, 2002). Οι κανονικότητες προσφέρουν ένα ισχυρό μέσον για την κατανόηση των συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ δύο ποσοτήτων (Mason, 1985; Lee & Freiman, 2006), καθώς και έναν συγκεκριμένο και διαφανή τρόπο για να μπορούν οι μαθητές να καταγίνονται με τις έννοιες της αφαίρεσης και της γενίκευσης.

Οι Mason κ. ά. (1985) χρησιμοποίησαν εκτεταμένα τις εικονιστικές κανονικότητες ως ένα πλούσιο πλαίσιο για την εξερεύνηση της γενίκευσης. Περιέγραψαν τέσσερα στάδια κατά τη διαδικασία της γενίκευσης κανονικοτήτων: *την αναγνώριση, την έκφραση, την καταγραφή και τον έλεγχο*. Πρώτα οι μαθητές διακρίνοντας συγγένειες «βλέπουν» την κανονικότητα και την περιγράφουν λεκτικά με περιφραστικές εκφράσεις της καθημερινής γλώσσας. Στη συνέχεια προχωρούν στο στάδιο της καταγραφής, η οποία μπορεί να περιλαμβάνει μια σειρά από διαφορετικές μορφές, όπως εικόνες, λέξεις, σύμβολα και συνδυασμούς αυτών. Τέλος, ακολουθεί η διενέργεια ελέγχου. Ο δρόμος προς τη γενίκευση απαιτεί λεπτή παρατήρηση και σύγκριση των όρων σε ένα μικρό «δείγμα» της ακολουθίας, επισήμανση του «συνδετικού ιστού» και διάκριση των όψεων που αλλάζουν από αυτές που παραμένουν σταθερές.

Σύμφωνα με τον Radford (2008), οι αλγεβρικές γενικεύσεις κανονικοτήτων δεν χαρακτηρίζονται από τη χρήση συμβόλων αλλά μάλλον από έναν ξεχωριστό τρόπο αντιμετώπισης του γενικού. Οι αλγεβρικές γενικεύσεις προκύπτουν (1) από την εκμαίευση μιας κανονικότητας (grasping a commonality), (2) τη γενίκευση αυτής της κανονικότητας για όλους τους όρους της υπό εξέταση ακολουθίας, και (3) τη διατύπωση ενός κανόνα που επιτρέπει τον άμεσο προσδιορισμό οποιουδήποτε όρου της ακολουθίας. Συνήθως οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν τη σκοπιμότητα μιας παράστασης με μεταβλητές και τη σημασία της χρήσης κατάλληλου μαθηματικού λεξιλογίου για να εκφράσουν γενικεύσεις. Η ευέλικτη μετακίνηση των μαθητών μεταξύ διαφόρων μορφών αναπαράστασης αναγνωρίστηκε ως πολύτιμη ικανότητα. Όμως, όταν παρέχουμε στους μαθητές έτοιμα μοντέλα, συνήθως αδυνατούν να διακρίνουν τις σχέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων (συμβολικές, εικονιστικές, αριθμητικές) και δεν αντιλαμβάνονται την ισοδυναμία τους (Greeno & Hall, 1997; Rivera & Becker, 2008).

Οι κανονικότητες είναι μαθηματικές δομές ή σχέσεις. Οι γενικεύσεις των μαθητών καθώς ασχολούνται με προβλήματα κανονικοτήτων συνιστούν διερευνητική διεργασία που συνδυάζει επαγωγικό συλλογισμό (induction), προβολή εξηγητικών υποθέσεων (abduction) (Rivera & Becker, 2007), ακόμα και παραγωγικό συλλογισμό (deduction). Επιπλέον, κατά τη γενίκευση οι μαθητές θα πρέπει «*να βλέπουν το ειδικό μέσα στο γενικό και το γενικό μέσω του ειδικού»* (Mason, 2002). Οι γενικεύσεις των μαθητών διακρίνονται σε αριθμητικές και αλγεβρικές καθώς και σε ορισμένες μορφές απλοϊκού εμπειρισμού στις οποίες προσφεύγουν συχνά οι μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα κανονικότητας (Radford, 2008).

Κατά την τελευταία εικοσαετία η έρευνα για τις κανονικότητες και τη γενίκευση έδειξε ότι οι μαθητές έχουν την τάση να «βλέπουν» την ίδια κανονικότητα με διαφορετικό τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι είναι ενδεχόμενο για την ίδια κανονικότητα να καταλήγουν σε διαφορετικές γενικεύσεις (Rivera & Becker, 2008). Την άποψη αυτή υποστηρίζουν επίσης ορισμένες εμπειρικές μελέτες. Οι Hargreaves κ. ά. (1998) εξέτασαν 315 παιδιά ηλικίας από 7 μέχρι 11 ετών τα οποία έλαβαν μέρος σε πολυάριθμες δραστηριότητες με κανονικότητες.

Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας έδειξαν ότι τα παιδιά όχι απλώς έκαναν γενικεύσεις με συγκεκριμένες στρατηγικές, αλλά επιπλέον ήταν ικανά να αναπτύσσουν διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες.

Η Stacey (1989) αναφέρει μια μελέτη στην οποία μαθητές ηλικίας μεταξύ 9 και 13 ετών εργάστηκαν πάνω σε προβλήματα γενίκευσης γραμμικών κανονικοτήτων. Αυτές ορίζονται ως προβλήματα που απαιτούν από τους μαθητές να παρατηρήσουν και να χρησιμοποιήσουν ένα γραμμικό μοντέλο της μορφής $f(v)=\alpha v+\beta$ με $\beta\neq0$. Η Stacey ταξινόμησε τις στρατηγικές των μαθητών, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που οδηγούν σε λανθασμένες απαντήσεις. Η μελέτη της Stacey εισάγει, επίσης, τους όρους «κοντινή γενίκευση» (near generalisation) και «μακρινή γενίκευση» (far generalisation) διακρίνοντας τα παραδείγματα που μπορούν εύλογα να λυθούν με σχεδίαση ή με βήμα προς βήμα προσέγγιση από εκείνα τα οποία είναι αδύνατο να λυθούν με αυτόν τον τρόπο.

Οι Orton κ.ά. (1999) αναφέρουν τρεις λόγους για να θέτουμε εικονιστικές κανονικότητες με διακεκριμένα στοιχεία. Ο πρώτος αφορά εκείνους τους μαθητές που προτιμούν καλύτερα τις εικονιστικές εκφωνήσεις και σκέφτονται πιο αποδοτικά σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι τα διακεκριμένα εικονιστικά στοιχεία ενισχύουν την κατανόηση γιατί είναι περισσότερο συγκεκριμένα σε σύγκριση με το αφηρημένο περιεχόμενο των συμβόλων. Ο τρίτος είναι ότι παρέχει ευκαιρίες τροποποίησης της εκφώνησης και δημιουργίας εναλλακτικών προβλημάτων. Υπάρχουν τρεις τρόποι μετάφρασης του περιεχομένου μιας εικόνας σε αριθμητική αναπαράσταση. Αυτοί είναι: (1) η καταμέτρηση των αριθμήσιμων αντικειμένων σε κάθε δοσμένο σχήμα και η μετάφρασή τους σε αριθμούς, (2) η επισήμανση του πλήθους των αντικειμένων που προστίθενται σε κάθε νέο σχήμα διακρίνοντας τη σχέση μεταξύ δύο διαδοχικών ποσοτήτων, και (3) η οπτική αντίληψη των σχημάτων (Orton et al., 1999).

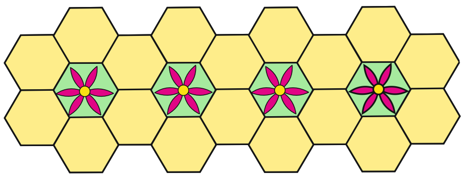
Οι εργασίες των μαθητών με ακολουθίες κανονικοτήτων θεωρούνται κατάλληλες τόσο για την πρωτοβάθμια όσο και για την δευτεροβάθμια εκπαίδευση γι' αυτό εισήχθησαν στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών (ΝΠΣΜ) για το Δημοτικό Σχολείο και το Γυμνάσιο. Οι κανονικότητες μπορεί να έχουν διαφορετικούς στόχους ανάλογα με την ηλικία και τις πρότερες εμπειρίες των μαθητών όπως είναι η εισαγωγή στην έννοια της μεταβλητής και της αλγεβρικής παράστασης, η ισοδυναμία διαφορετικών αλγεβρικών παραστάσεων, η ανάγκη μετασχηματισμού τους, η μοντελοποίηση, οι συναρτησιακές σχέσεις, κ.λπ. Λαμβάνοντας υπόψη τα προαναφερόμενα, οργανώσαμε μια πειραματική διδασκαλία στην οποία θα χρησιμοποιήσουμε ένα πρόβλημα κανονικότητας ως μέσον ανάπτυξης της αλγεβρικής κατανόησης των μαθητών. Ειδικότερα θα εξετάσουμε πώς οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου αναπτύσσουν και αιτιολογούν γενικεύσεις στην ειδική περίπτωση μιας εικονιστικής κανονικότητας γραμμικού τύπου. Ειδικότερα, τα κύρια ερωτήματα αυτής της εργασίας είναι:

- Ποια είναι τα είδη στρατηγικών γενίκευσης που επινοούν μαθητές της Α΄ Γυμνασίου;
- Με ποιους παράγοντες σχετίζονται οι στρατηγικές που προτιμούν;
- Ποια ήταν η στάση των μαθητών απέναντι στη διδασκαλία;

Η πειραματική διδασκαλία

Σε ένα τμήμα 27 μαθητών του 2ου Πρότυπου Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών ο Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών του σχολείου πραγματοποίησε δίωρη πειραματική διδασκαλία την οποία παρακολούθησαν οι καθηγητές κλ. ΠΕ3 του σχολείου. Η εν λόγω διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στις 26 Μαρτίου 2014 στην Α΄ Γυμνασίου και είχε ως θέμα την ομαδοσυνεργατική επίλυση ενός προβλήματος μιας εικονιστικής κανονικότητας γραμμικού τύπου (αριθμητική πρόοδος). Θα πρέπει να υπογραμμιστεί ότι οι κανονικότητες είναι μέρος του Νέου ΠΣΜ του Γυμνασίου. Το πρόγραμμα αυτό εφαρμόζεται κατά το διδακτικό έτος 2014-2015 από τους εκπαιδευτικούς του 2ου ΠΠ Γυμνασίου για τρίτη συνεχή χρονιά. Το πρόβλημα που ανατέθηκε στους μαθητές ήταν πραγματικό και ζητούσε από τους μαθητές να βοηθήσουν τους κηπουρούς να δώσουν λύση. Επίσης το πρόβλημα ήταν ανοιχτό κυρίως επειδή οδηγούσε σε πολλαπλές προσεγγίσεις (Kosyvas, 2010). Η διατύπωσή του ήταν η ακόλουθη:

Πρόβλημα: *Το δημοτικό συμβούλιο αποφάσισε να προχωρήσει στην ανάπλαση του δημοτικού κήπου της πόλης. Σύμφωνα με το σχεδιασμό οι κηπουροί χρησιμοποιούν εξαγωνικά παρτέρια λουλουδιών για τα φυτά και γύρω από αυτά τοποθετούν εξαγωνικές πλάκες σύμφωνα με το παρακάτω μοτίβο.*



Στο προηγούμενο σχήμα, 18 εξαγωνικές πλάκες περιβάλλουν 4 εξαγωνικά παρτέρια. Το μοτίβο συνεχίζεται.

(α) *Πόσες πλάκες θα χρειαστούν για 6 παρτέρια λουλουδιών;*

(β) *Είναι βέβαιο ότι θα έπαιρνε πολύ χρόνο στους κηπουρούς για να σχεδιάσουν και ύστερα να μετρήσουν τις πλάκες που θα χρειαστούν για 100 παρτέρια λουλουδιών. Όμως δεν ξέρουν Μαθηματικά για να επινοήσουν έναν κατάλληλο τρόπο. Γι' αυτό ζήτησαν τη βοήθειά σας. Να περιγράψετε έναν τρόπο που θα βοηθά τους κηπουρούς να γνωρίζουν πόσες πλάκες θα χρειαστούν για 100 παρτέρια λουλουδιών;*

(γ) *Να βρείτε έναν κανόνα που θα χρησιμοποιούν οι κηπουροί για να αποφασίζουν κάθε φορά ποιος είναι ο απαιτούμενος αριθμός εξαγωνικών πλακών για κάθε αριθμό παρτεριών. Να εξηγήσετε γιατί λειτουργεί ο κανόνας;*

(**Υπόδειξη**: Δεν αρκεί να δείξετε ότι ο κανόνας λειτουργεί μόνο για λίγες ειδικές περιπτώσεις. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας βασιζόμενοι στον τρόπο δημιουργίας των όρων του μοτίβου).

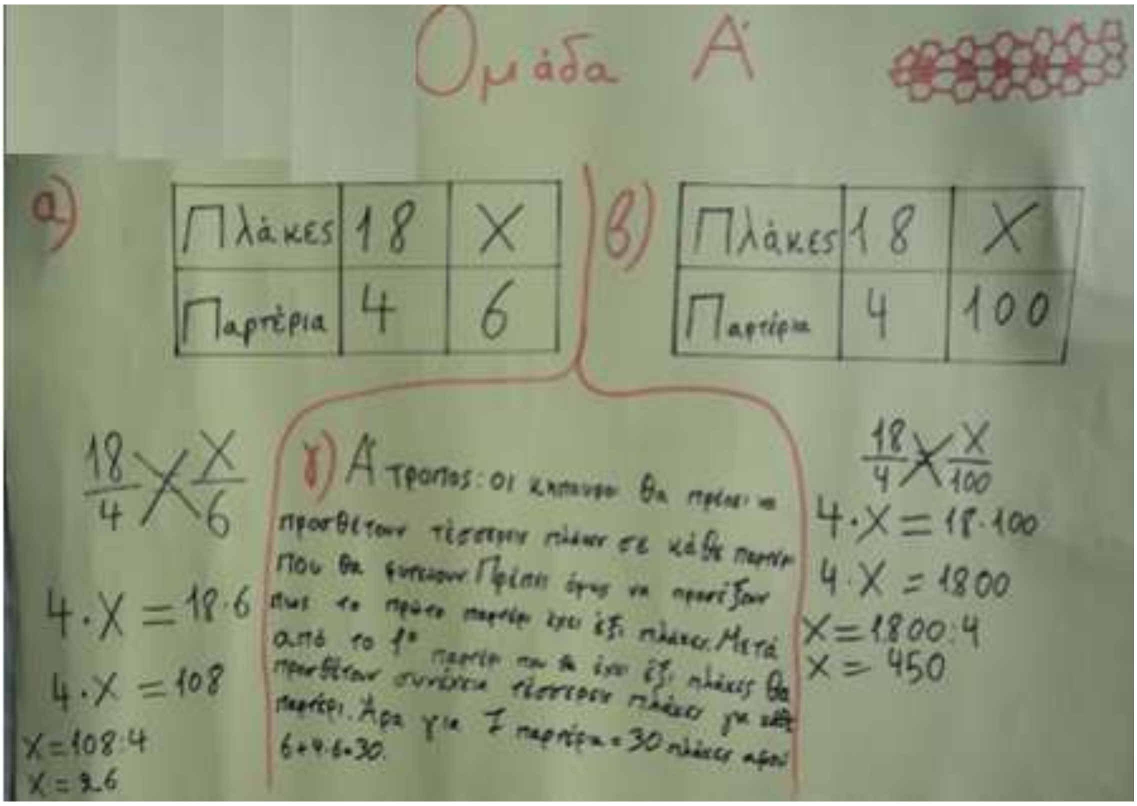
Πριν από την ανάθεση του προβλήματος στους μαθητές, είχε προηγηθεί σχετική διερεύνηση της βιβλιογραφίας πάνω σε διάφορες περιπτώσεις προβλημάτων με εικονιστικές κανονικότητες (Lannin et al., 2006; Rivera & Becker, 2008; van den Kieboom & Magiera, 2012). Σκοπός αυτού του προβλήματος ήταν να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να διερευνήσουν τη σχέση ανάμεσα στην ανεξάρτητη μεταβλητή (πλήθος παρτεριών λουλουδιών) και την εξαρτημένη μεταβλητή (αριθμός εξαγωνικών πλακών). Αναμενόταν το πλαίσιο του προβλήματος να παρακινήσει του μαθητές να επινοήσουν κατάλληλες μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις, να κάνουν εικασίες για τη συναρτησιακή σχέση και να βρουν τον γενικό κανόνα. Δύο σημαντικά χαρακτηριστικά της προβληματικής κατάστασης διευκολύνουν τη γενίκευση. Πρώτον, το πρόβλημα απαιτεί από τους μαθητές να βρουν τον αριθμό των εξαγωνικών πλακών για 6 και 100 παρτέρια λουλουδιών πριν βρουν το γενικό κανόνα. Αυτή η εξελικτική πορεία διευκολύνει τους μαθητές να αναγνωρίσουν ποιοι παράγοντες μεταβάλλονται και ποιοι μένουν ίδιοι καθώς υπολογίζουν το πλήθος των πλακών ενός παρτεριού. Δεύτερον, απαιτώντας από τους μαθητές να βρουν τον αριθμό των πλακών για σχετικά μικρό αριθμό παρτεριών (6) και στη συνέχεια για πολύ μεγαλύτερο (100), το πλαίσιο του προβλήματος υποχρεώνει τους μαθητές να μετακινηθούν πέρα από τη χρήση στρατηγικών σχεδιασμού και απαρίθμησης και να προσδιορίσουν μια γενική σχέση που ενυπάρχει στην κατάσταση. Με άλλα λόγια οι μαθητές ενθαρρύνονται να σκεφτούν πέρα από το ερώτημα «*Ποιος είναι ο αριθμός των πλακών στην επόμενη θέση*» και να περάσουν στην απάντηση του ερωτήματος «*Ποιος είναι ο κανόνας σχηματισμού του μοτίβου;*».

Η διάρκεια του πειραματισμού ήταν δύο συνεχόμενες διδακτικές ώρες. Πρώτα οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά πάνω στο πρόβλημα για 5 περίπου λεπτά. Ο χρόνος αυτός επέτρεψε στους μαθητές να σκεφτούν και να αναπτύξουν μια τουλάχιστον στρατηγική για την εύρεση του αριθμού των εξαγωνικών πλακών. Στη συνέχεια οι μαθητές πέρασαν στη φάση της ομαδικής διερεύνησης, κατά την οποία μοιράστηκαν τις σκέψεις τους σε τετραμελείς ομάδες και συζήτησαν αν η στρατηγική τους είναι σωστή, καθώς και τα μειονεκτήματα και πλεονεκτήματά της και έγραψαν τον κοινό προβληματισμό της ομάδας τους σε ένα μεγάλο χαρτόνι από κανσόν (Kosyvas, 2013a). Τέλος, ακολούθησε μαθηματική συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη πάνω στις ποικίλες στρατηγικές που έγραψαν στα χαρτόνια, η οποία επεκτάθηκε στο ερώτημα σε τι συνίσταται μια έγκυρη και αποτελεσματική γενίκευση. Στους παριστάμενους εκπαιδευτικούς μοιράστηκε ένα κείμενο, το οποίο περιείχε μια ανάλυση των πιθανών λύσεων των μαθητών. Ορισμένες αναμενόμενες προσεγγίσεις είναι: **2+ ν·4, 6+ (ν-1)·4, 6ν-(ν-1)·2.** Οι διαφορετικές παραστάσεις θα μπορούσαν να τροφοδοτήσουν μια συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη σχετικά με την ισοδυναμία τους.

Η επεξεργασία των δεδομένων περιλαμβάνει ανάλυση της διδασκαλίας, συνεξέταση των γραπτών εργασιών των ομάδων, σύντομη αξιολόγηση της διδασκαλίας από τους μαθητές, καθώς και σχολιασμό της διδασκαλίας από τους παρατηρητές εκπαιδευτικούς.

Σύντομη παρουσίαση των εργασιών των ομάδων

Για τη σειρά παρουσίασης των εργασιών των μαθητών λήφθηκε υπόψη η αναμενόμενη ποιότητα διαλόγου στην ολομέλεια. Από παιδαγωγική και διδακτική άποψη είναι καλύτερα η πρώτη συλλογική αφίσα να είναι σαφής και λανθασμένη (Kosyvas, 2013b).



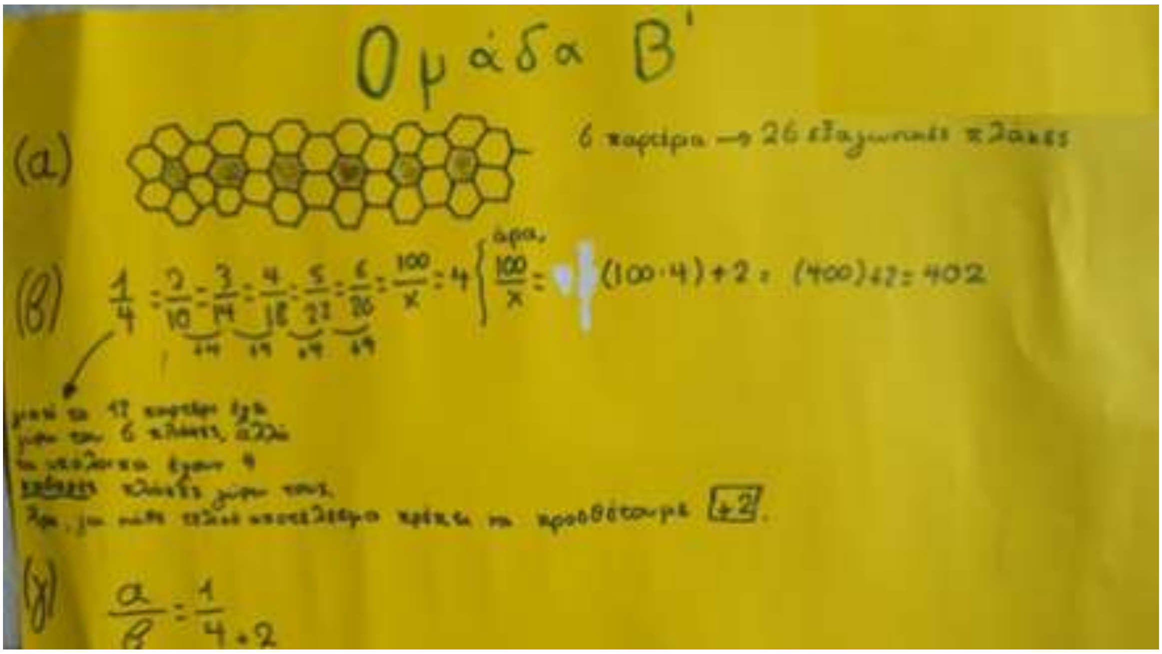
Οι μαθητές αυτής της ομάδας δεν αντιλήφθηκαν ότι πρόκειται για συνάρτηση της μορφής y=αx+β, με α=4 και β=2. Δεν μπόρεσαν να συνεξετάσουν τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα με τη σταθερά για να βρουν τη συναρτησιακή σχέση και έκαναν ανεπιτυχή χρήση αναλογικού συλλογισμού. Ένας μαθητής κατά τη διερεύνηση στην ομάδα του είπε: «*Εφόσον για τα 4 παρτέρια χρειαζόμαστε 18 πλάκες, για τα 8 θα χρειαστούμε 36. Για τα 2 θα χρειαστούμε 9 πλάκες και για τα 6 παρτέρια θα χρειαστούμε 18 και 9 , δηλαδή 27 πλάκες*». Μια συμμαθήτριά του αντιπρότεινε να ολοκληρώσουν τη σχεδίαση για να μετρήσουν τις πλάκες που περιβάλλουν τα 6 παρτέρια λουλουδιών. Όμως η σχεδίαση δεν ολοκληρώθηκε. Έτσι αποφάσισαν να δημιουργήσουν πίνακες αναλογιών και να επιχειρήσουν να βρουν τον άγνωστο όρο της αναλογίας με τη χιαστί μέθοδο.

Στη συζήτηση στην ολομέλεια επισημάνθηκε ο λανθασμένος αναλογικός τρόπος σκέψης στα δύο πρώτα ερωτήματα. Ένας μαθητής πρότεινε: «*Αν μετρήσουμε όλες τις εξαγωνικές πλάκες που είναι γύρω από το σχήμα με τα 6 παρτέρια βρίσκουμε 26 πλάκες. Όμως η διαίρεση 108:4 κάνει 27 και όχι 26. Νομίζω ότι έγραψαν 26, επειδή αυτό ήταν το σωστό αποτέλεσμα*». Η μέθοδος της απαρίθμησης είναι κατάλληλη όταν απαριθμούμε ένα σχήμα με 6 παρτέρια, όμως οι μαθητές θα δυσκολευτούν να βρουν τον κανόνα για κάθε όρο της ακολουθίας.

Στο δεύτερο ερώτημα με εσφαλμένη χρήση αναλογίας βρήκαν 450 πλάκες, ενώ η σωστή αριθμητική απάντηση είναι 404.

Στο τρίτο ερώτημα οι μαθητές ανακάλυψαν την αναδρομικότητα, *“Μετά το 1ο παρτέρι που θα έχει έξι θα προσθέτουν συνέχεια τέσσερις πλάκες για κάθε παρτέρι”* και τον αριθμητικό τύπο για 7 παρτέρια λουλουδιών (6+6·4=30). Ο αναδρομικός κανόνας προκύπτει από την παρατήρηση του σχήματος. Οι μαθητές της ομάδες δυσκολεύτηκαν να μετακινηθούν πέρα από την αναδρομική στρατηγική. Στην ολομέλεια επισημάνθηκε ότι αυτή η αριθμητική παράσταση παραπέμπει στον υποκείμενο συναρτησιακό κανόνα για την εύρεση του πλήθους των εξαγωνικών πλακών σε οποιοδήποτε πλήθος παρτεριών. Η λύση δεν ολοκληρώθηκε.

Ομάδα Β

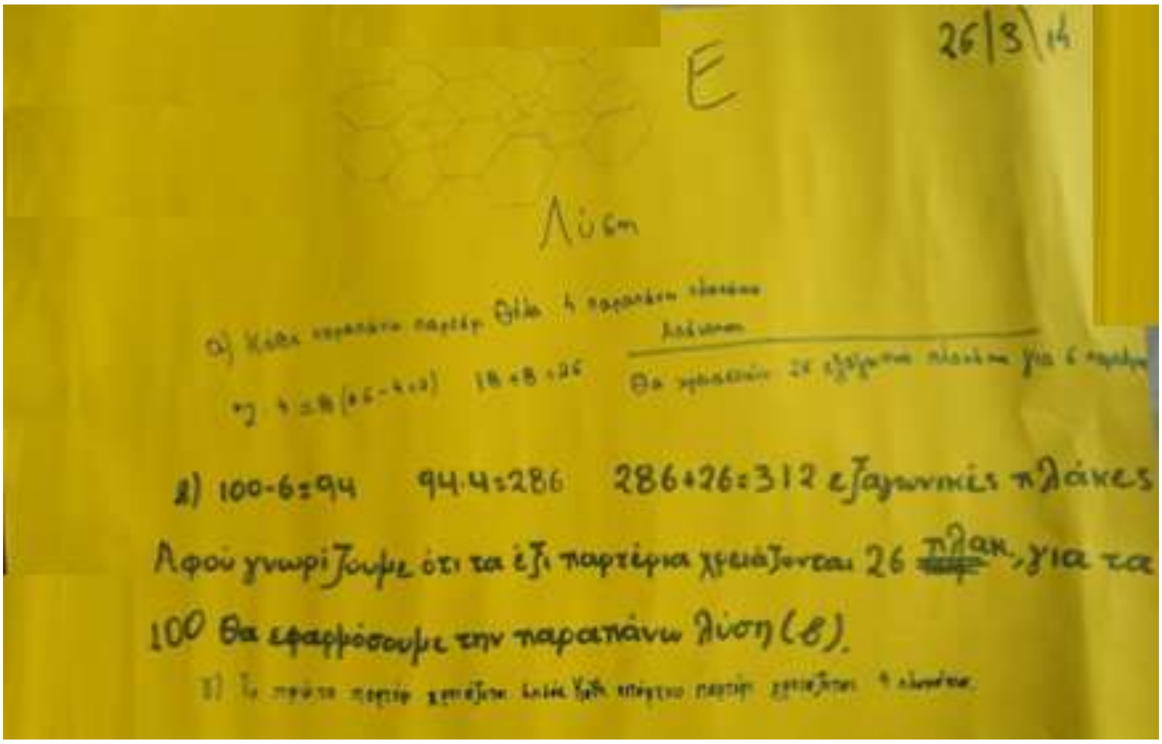


Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας κατασκεύασαν το σχήμα με τα 6 παρτέρια και απαριθμώντας έδωσαν την απάντηση: 26 εξαγωνικές πλάκες. Στο δεύτερο ερώτημα με πρώτη ματιά έχουμε λανθασμένες ισότητες κλασμάτων. Όμως οι μαθητές δεν αξιοποίησαν την αναλογία για να βρουν το πλήθος των εξαγωνικών πλακών για 100 παρτέρια λουλουδιών (είναι πιθανό να βρήκαν κάποιο αποτέλεσμα το οποίο έσβησαν).

Όπως φάνηκε και από τη συζήτηση στην τάξη, οι μαθητές αναφέρονταν σε έναν πίνακα τιμών, ο οποίος τους βοηθούσε να επισημαίνουν τη διαφορά από όρο σε όρο. Κατέληξαν στον αναδρομικό κανόνα που εξέφρασαν ως +4. «*Για να βρούμε τις πλάκες, χωρίζουμε τις 2 πλάκες του πρώτου παρτεριού σε 2+4 και ύστερα προσθέτουμε 4 πλάκες για κάθε νέο παρτέρι που προσθέτουμε, δηλαδή για κάθε νέο παρτέρι χρειαζόμαστε 4 ακόμα πλάκες*».

Στο δεύτερο ερώτημα οι μαθητές δημιούργησαν τον τύπο για τον εκατοστό όρο: (100·4)+2=(400)+2=402. Έτσι χωρίς περαιτέρω αιτιολόγηση της σκέψης τους βρήκαν ότι το σχήμα με τα 100 παρτέρια θα έχει 402 πλάκες. Οι μαθητές αυτής της ομάδας είχαν δυσκολίες στην αναγνώριση και γενίκευση του κανόνα της κανονικότητας (4ν+2). Όμως, παρότι απέτυχαν να δώσουν τον σωστό γενικό τύπο, ανέφεραν ότι σε κάθε τελικό αποτέλεσμα πρέπει να προσθέτουμε 2. Η εμμονή στην αναλογία εκφράστηκε και στην απόπειρα εύρεση του γενικού όρου: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{4+2}$.

Ομάδα Ε

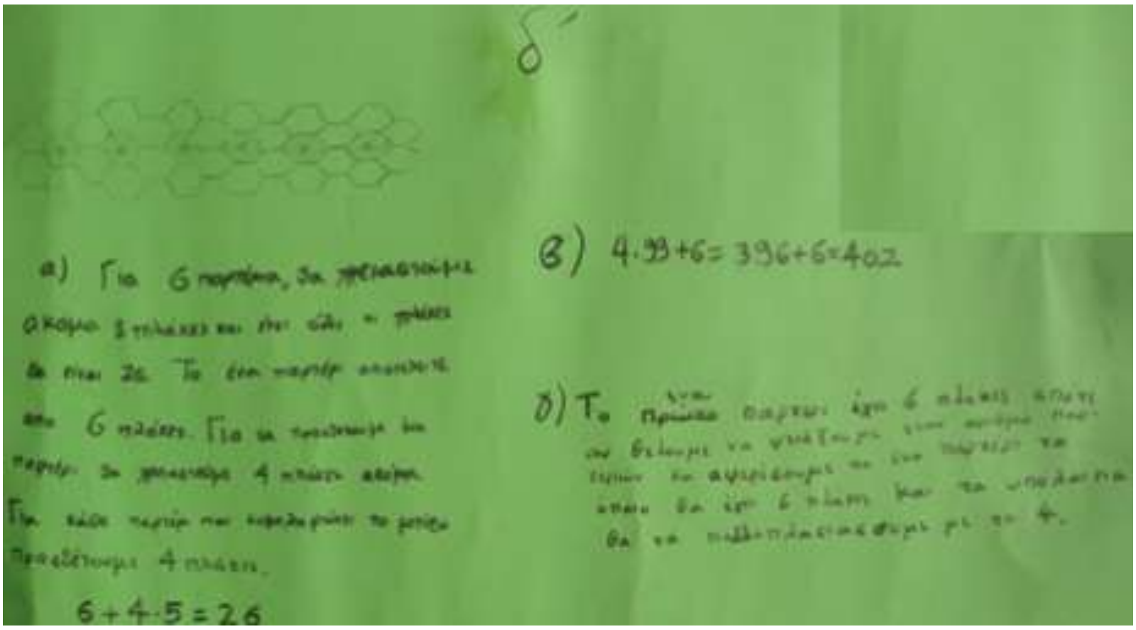


Οι μαθητές αυτής της ομάδας δεν ολοκλήρωσαν τη σχεδίαση του 6^{ου} όρου. Όμως χωρίς να χρησιμοποιήσουν εποπτεία υπολόγισαν σωστά πόσες εξαγωνικές πλάκες έχουν τα 6 παρτέρια λουλουδιών (6^{ος} όρος). Ο μαθητής που παρουσίασε την εργασία της ομάδας σε ολόκληρη την τάξη εξήγησε: «*Βρήκαμε ότι κάθε επιπλέον παρτέρι θα έχει 4 πλακάκια ακόμα. Ήδη γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των εξαγωνικών πλακών για τα 4 παρτέρια είναι 16. Στα 16 πρέπει να προσθέσουμε τις πλάκες δύο ακόμα παρτεριών (6-4=2). Αυτά τα δύο παρτέρια θα έχουν 2×4=8 πλάκες. Επομένως ο αριθμός των πλακών για τα 6 παρτέρια θα είναι 18+8=26*».

Οι μαθητές δεν έδωσαν στο χαρτόνι σωστή απάντηση για τον 100ό όρο, λόγω αριθμητικού λάθους. Όμως ο συλλογισμός που περιγράφεται είναι σωστός. Η λύση διορθώθηκε κατά τη συζήτηση στην τάξη. Μια μαθήτρια παρατήρησε: «*Από τα 100 παρτέρια βγάζουμε τα 6 που έχουν 26 πλάκες. Τα υπόλοιπα 94 θα έχουν 94×4=376 πλάκες και όχι 286 όπως γράφει το χαρτόνι. Έτσι η σωστή απάντηση θα είναι 376+26=402 εξαγωνικές πλάκες. Οπότε τα 100 παρτέρια θα έχουν 402 πλάκες».*

Οι μαθητές της ομάδας Ε δεν κατάφεραν να βρουν τον γενικό κανόνα. Όμως στο χαρτόνι τους έκαναν περιγραφή του αναδρομικού κανόνα: *Κάθε επόμενο παρτέρι χρειάζεται 4 πλακάκια*. Η γεωμετρική εποπτεία φαίνεται ότι υπέβαλε στους μαθητές της ομάδας την αναδρομική διαδικασία ότι για κάθε επόμενο παρτέρι θα πρέπει να προστίθενται 4 πλακάκια. Η συζήτηση που αναπτύχθηκε πάνω στα μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα του αναδρομικού και του γενικού κανόνα βοήθησε στη βαθύτερη κατανόηση.

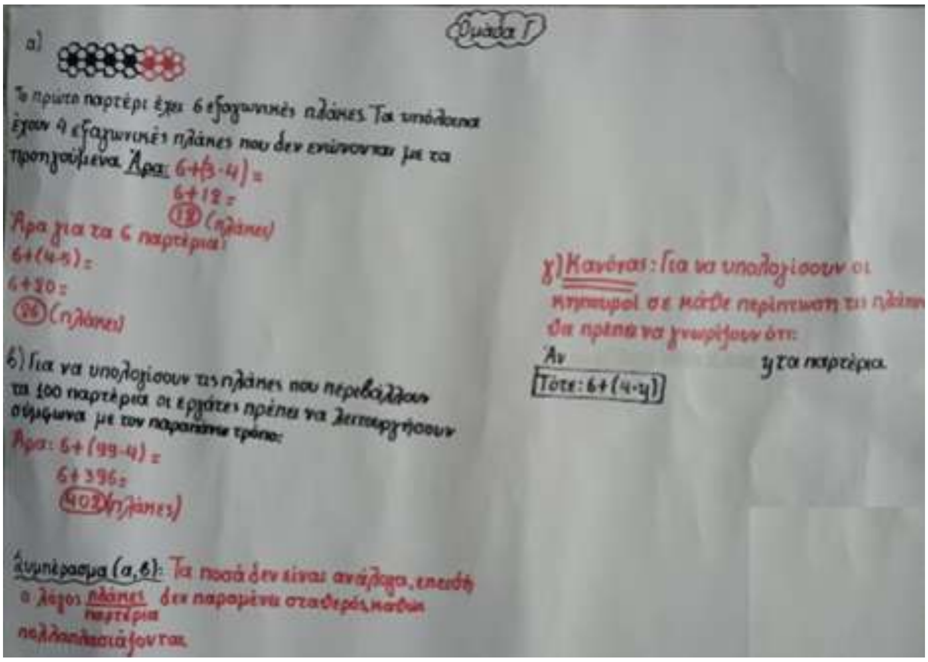
Ομάδα Δ



Η προαναφερόμενη στρατηγική συνιστά υπέρβαση της προσθετικής με πολλαπλασιαστική στρατηγική. Στις αριθμητικές παραστάσεις οι αριθμοί χρησιμοποιούνται σχεδόν ως μεταβλητές (αριθμοί στη θέση γραμμάτων) και έτσι ελαττώνουν την απόσταση ανάμεσα στην αριθμητική και την αλγεβρική γενίκευση. Μάλιστα ο «μεγάλος» αριθμός (100) χρησιμεύει ως ενδιάμεσος συνδετικός κρίκος για να εκφράσει την αλγεβρική γενίκευση με αριθμητικά σύμβολα (Κόσυβας, 2009α).

Οι μαθητές της ομάδας γενίκευσαν λεκτικά την κανονικότητα στους υπόλοιπους όρους χωρίς όμως να προμηθεύσουν ένα γενικό αλγεβρικό τύπο που να επιτρέπει τον υπολογισμό του αριθμού των τετραγώνων κάθε σχήματος. Στη διαδικασία αυτή έχουμε μια γενίκευση που όμως δεν είναι αλγεβρικής φύσης. Τη γενίκευση αυτή ονομάζεται αριθμητική γενίκευση (Radford, 2008).

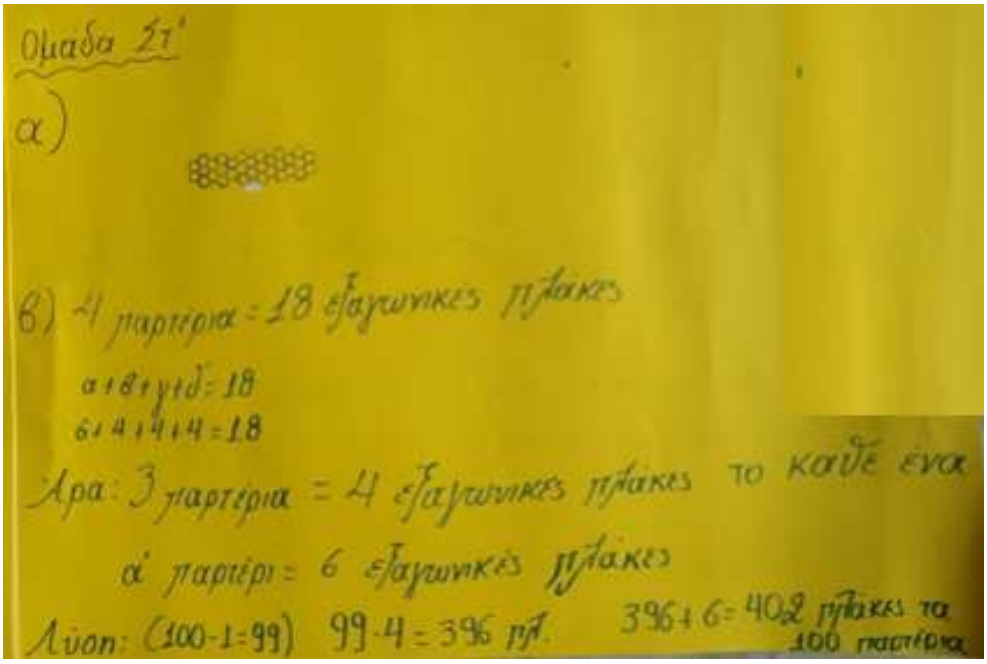
Ομάδα Γ



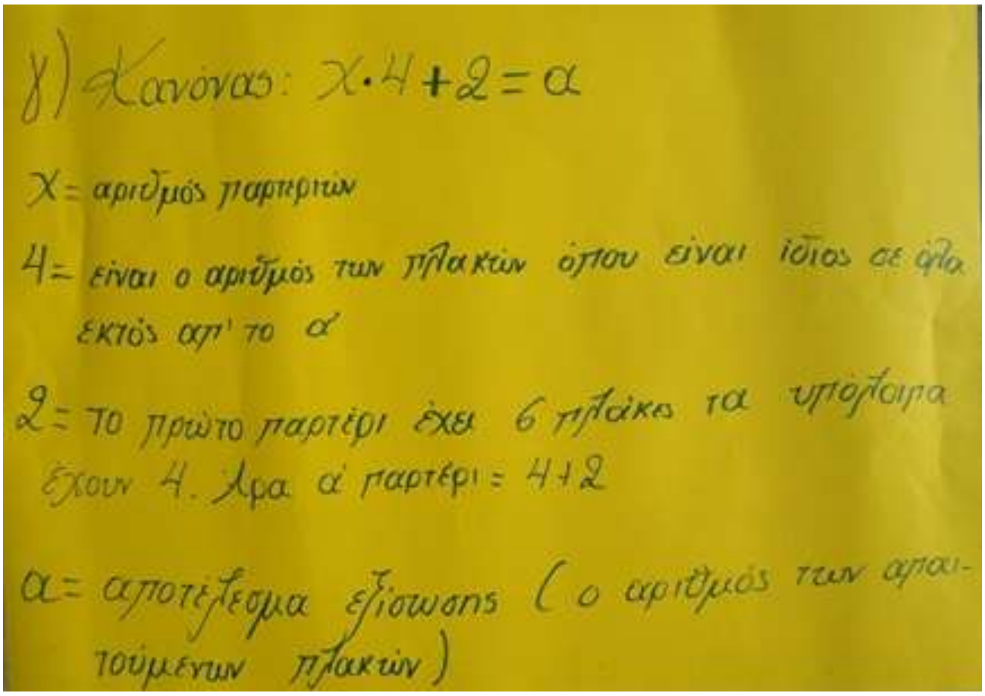
Οι μαθητές της ομάδας για να λύσουν το πρόβλημα ξεχώρισαν τις 6 εξαγωνικές πλάκες. Η μαθήτρια που παρουσίασε τη λύση ανέφερε: «*Μπορούμε να χωρίσουμε κάθε παρτέρι σε δύο μέρη: στο μέρος που μένει το ίδιο και στο μέρος που μεγαλώνει. Το μέρος που μένει το ίδιο είναι οι 6 πλάκες και το μέρος που αλλάζει είναι ο πολλαπλασιασμός των y παρτεριών με το 4»*. Το προηγούμενο μοντέλο είναι ευρετικό εφόσον δεν είναι αποτέλεσμα μιας αξιωματικής απόδειξης όπως ή μαθηματική επαγωγή. Η γεωμετρική μοντελοποίηση πρόσφερε έναν ανεκτίμητο τρόπο για την προώθηση της οπτικής σκέψης και λειτούργησε ως αναλογικό πλαίσιο αναφοράς που έδωσε νόημα στον αλγεβρικό τύπο.

Κατά τη συζήτηση στην τάξη έγινε η αναγκαία διόρθωση και δόθηκε το σωστό νόημα στον τύπο 6+4y. Αναφέρθηκε ότι «*το y παριστάνει τα υπόλοιπα παρτέρια, δηλαδή ένα λιγότερο από όλα*». Οι μαθητές γενίκευσαν τις δικές τους μαθηματικές ιδέες αναπτύσσοντας πλούσια εννοιολογική κατανόηση. Ξεκινώντας από ένα σύνολο ειδικών περιπτώσεων κατέληξαν στην αλγεβρική γενίκευση και την οπτική αιτιολόγηση. Η προηγούμενη λύση αποκαλύπτει μια πολυδιάστατη ικανότητα των μαθητών που περιλαμβάνει γόνιμη χρήση προηγούμενης γνώσης, συσχέτιση της Γεωμετρίας με την Αριθμητική, συλλογισμό κατ' αναλογία και ευχέρεια στον αριθμητικό και αλγεβρικό λογισμό. Τις πληροφορίες που αντλούν από τη λεπτή παρατήρηση του σχήματος με τάξη 6 τις επεκτείνουν για το εκατοστό και το γενικό σχήμα.

Ομάδα ΣΤ



Οι μαθητές της ομάδας ΣΤ σχεδίασαν το σχήμα για 6 παρτέρια λουλουδιών. Για να απαντήσουν στο δεύτερο ερώτημα έκαναν υπολογισμούς: *100-1=99 99·4=396 πλ. 396+6=402 πλάκες τα 100 παρτέρια.* Απομόνωσαν το πρώτο παρτέρι του 100ού όρου (6 πλάκες) και πολλαπλασίασαν τα υπόλοιπα 99 με το 4 καταλήγοντας στη σωστή λύση.



Εδώ αξίζει να επισημανθούν πρώτα μερικές παρατηρήσεις από την εσωτερική συζήτηση στη μικρή ομάδα. Για την εύρεση του κανόνα έγινε ο ακόλουθος διάλογος:

Μαθήτρια Α: *Δοκίμασα μερικούς κανόνες και κατέληξα στον εξής: πολλαπλασιάζω με 4 και προσθέτω 2. Τον δοκίμασα και λειτουργεί.*

Μαθήτρια Β: *Για να δούμε. Για ένα και για δύο παρτέρια ο κανόνας ισχύει… Για τρία και τέσσερα επίσης.*

Μαθήτρια Α: *Ισχύει και για 6 παρτέρια γιατί 4 φορές το 6 κάνει 24 και 2 βρίσκουμε 26. Ανακάλυψα τη λύση! Αυτό είναι!*

Μαθήτρια Β: *Ναι έτσι είναι …, οπότε θα ισχύει για όλους τους αριθμούς.*

Μαθήτρια Γ: *Δεν συμφωνώ με αυτό που κάνετε. Δεν πιστεύω ότι θα ισχύει πάντοτε. Μπορεί να ισχύει για μερικούς αριθμούς, αλλά μπορεί να μην ισχύει για μερικούς άλλους.*

Μαθήτρια Β: *Για να αποδείξουμε ότι ισχύει για όλους τους αριθμούς θα χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές…*

Οι μαθήτριες κατέληξαν στη χρήση μεταβλητών και έγραψαν τη λύση που φαίνεται στο παραπάνω χαρτόνι. Κατά τη γενική συζήτηση στην ολομέλεια οι μαθήτριες αιτιολόγησαν πλήρως τη λύση τους. Ο ζητούμενος γενικός τύπος για να αποφασίζουν οι κηπουροί κάθε φορά ποιος είναι ο απαιτούμενος αριθμός εξαγωνικών πλακών για x παρτέρια είναι ο εξής:

$$x \cdot 4 + 2 = \alpha \text{ πλάκες.}$$

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν παριστάνουν συμμεταβαλλόμενες ποσότητες. Η αυθόρμητη χρήση τυπικού συμβολισμού διευκόλυνε τις μαθήτριες της ομάδας να δουν τα αλγεβρικά σύμβολα ως αναπαραστάσεις μεταβλητών ποσοτήτων. Ο προηγούμενος τύπος παριστάνει μια συναρτησιακή συσχέτιση στην οποία ο γενικός όρος της ακολουθίας εκφράζεται ως συνάρτηση της θέσης του ($\alpha_\nu=4\nu+2$). Η προηγούμενη λύση αποκαλύπτει μια πολυσύνθετη ικανότητα των μαθητών με φαντασία, ενεργοποίηση προηγούμενης γνώσης και ευχέρεια στις αριθμητικές πράξεις.

Η αμφιβολία για την αποδοχή του κανόνα στον προηγούμενο διάλογο θέτει το ερώτημα σε τι συνίσταται μια έγκυρη και αποτελεσματική γενίκευση. Η τέλεια ή μαθηματική επαγωγή αποτελεί μορφή παραγωγικού συλλογισμού (deduction), η οποία δύσκολα μπορεί να κατανοηθεί και να γίνει αποδεκτή από τους δωδεκάχρονους μαθητές. Η ανακάλυψη του προαναφερόμενου γενικού κανόνα (x·4+2=α πλάκες) ως απότοκο του διαμαθητικού διαλόγου είναι εύλογη και πιθανή και παραπέμπει σε ένα νέο είδος συλλογισμού. Όταν συνάγουμε συμπεράσματα για ένα φαινόμενο που δεν μπορούμε ποτέ να συλλάβουμε πλήρως, σύμφωνα με τον Peirce χρησιμοποιούμε μαζί δύο συμπληρωματικά είδη συλλογισμού: τον συλλογισμό με εξηγητικές υποθέσεις (abductive) και τον επαγωγικό (inductive) συλλογισμό[1]. Ο συλλογισμός με εξηγητικές υποθέσεις περιλαμβάνει τη διατύπωση μιας λογικής υπόθεσης για το φαινόμενο. Ανάλογη συμπεριφορά των μαθητών διαπιστώσαμε στο πρόβλημα των χειραψιών (Κόσυβας, 2011). Για να διατυπώσουμε μια υπόθεση, την επαληθεύουμε πολλές φορές και εξετάζουμε αν έχει νόημα. Όταν γενικεύουμε μια κανονικότητα με βάση ένα μικρό «δείγμα» χρειάζεται να στρέψουμε την προσοχή μας στον τρόπο με τον οποίο συνεργούν η εξηγητική υπόθεση (abduction) και η επαγωγή (induction) στο σχηματισμό και την αιτιολόγηση μιας πλήρους και έγκυρης αλγεβρικής γενίκευσης.

Σύνοψη και περαιτέρω συζήτηση των στρατηγικών των μαθητών

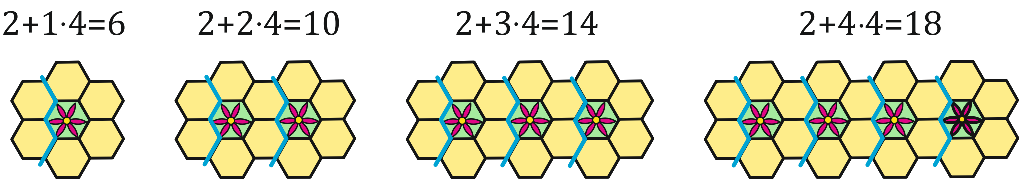
Το πρόβλημα με την εικονιστική κανονικότητα των παρτεριών λουλουδιών δεν κατέληξε απλώς στην εύρεση του γενικού κανόνα, αλλά οδήγησε στην εύρεση εναλλακτικών αλγεβρικών παραστάσεων. Η οπτικοποίηση της κανονικότητας διευκόλυνε τους μαθητές να επινοήσουν διαφορετικές παραστάσεις, να κατανοήσουν τη φύση της μεταβλητής και να εξοικειωθούν με τη δομή των αλγεβρικών παραστάσεων. Βαρύνουσα σημασία είχε ο τρόπος σκέψης των μαθητών και το νόημα που απέδιδαν στα σύμβολα τα οποία επινόησαν. Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στις στρατηγικές αλγεβρικής γενίκευσης του προβλήματος. Στο τέλος ακολουθεί ο σχολιασμός ορισμένων ιδεών που δεν τελεσφόρησαν.

1. Η στρατηγική 2+4· ν

Η προσέγγιση αυτή στην Άλγεβρα των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου χαρακτηρίζεται από την κανονικότητα του ακόλουθου σχήματος. Οι μαθητές ανακάλυψαν τον κανόνα «προσθέτουμε 4». Η ακόλουθη παραστατική λύση ενισχύει τον εικονιστικό συλλογισμό των μαθητών (Bennett, 1988; Tanisli, 2011). Απομονώνουν τις 2 πρώτες πλάκες κάθε όρου και παρατηρούν ότι για τη μετάβαση στο εκάστοτε επόμενο παρτέρι λουλουδιών προστίθενται κάθε φορά 4 πλάκες.

---

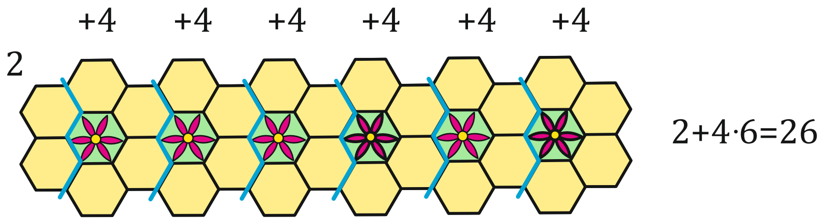
[1] Ο Peirce εισήγαγε την εξηγητική υπόθεση (abduction), ενώ θεώρησε ότι η επαγωγή (induction) και η παραγωγή (deduction) είναι αναγκαία και συμπληρωματικά εργαλεία για αυτήν. Η εξηγητική υπόθεση είναι ένα τρίτο είδος συλλογισμού, όπου από μια συλλογή δεδομένων, γεγονότων ή παρατηρήσεων συλλαμβάνουμε μια υπόθεση που τα εξηγεί καλύτερα από άλλες. Η εν λόγω εξηγητική υπόθεση είναι πιθανώς αληθινή. «*Στην επαγωγή γενικεύουμε από έναν αριθμό περιπτώσεων στις οποίες κάτι είναι αλήθεια και συνάγουμε ότι το ίδιο πράγμα είναι πιθανά αληθινό για ολόκληρη την τάξη. Αλλά στην* εξηγητική υπόθεση, *περνάμε από την παρατήρηση ορισμένων γεγονότων στην υπόθεση μιας γενικής αρχής που εξηγεί τα γεγονότα*» (Fann, 1970, p. 10). Όταν οι γιατροί κάνουν μια γνωμάτευση ή όταν οι δικαστές αναλύουν μια υπόθεση με ελλιπή στοιχεία το πρώτο στάδιο της συναγωγής των συμπερασμάτων τους περιέχει εξηγητική υπόθεση.



1ος Όρος (1 παρτέρι) 2ος Όρος (2 παρτέρια) 3ος Όρος (3 παρτέρια) 4ος Όρος (4 παρτέρια)

Για τη δημιουργία κι άλλων παρτεριών λουλουδιών προστίθενται 4 ακόμα πλάκες σε κάθε όρο. Ο 1ος όρος έχει «2 και μια ομάδα από τέσσερις πλάκες». Ο 2ος όρος έχει «2 και δύο ομάδες από τέσσερις πλάκες». Ο 3ος όρος έχει «2 και τρεις ομάδες από τέσσερις πλάκες» κ.ο.κ. Στο πλαίσιο του προβλήματος η μεταβλητή ν παριστάνει την ένδειξη της θέσης (1^{ος} όρος με 1 παρτέρι, 2^{ος} όρος με δύο παρτέρια κ.λπ.) και οι αντίστοιχες αλγεβρικές εκφράσεις περιγράφουν τον αριθμό των εξαγωνικών πλακών για τους αντίστοιχους όρους (2+1·4, 2+2·4 κ.λπ.).

(α) Ελέγχουμε τον κανόνα για τον 6^{ο} όρο: θα έπρεπε να έχουμε 2 πλάκες και επιπλέον 6 ομάδες από 4. Συνολικά για 6 παρτέρια λουλουδιών θα χρειαστούν: 2+6·4=26 πλάκες. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το σχήμα μας και να προβούμε σε απαρίθμηση. Πράγματι για το σχηματισμό του χρειάστηκαν 26 πλάκες.



6ος Όρος (6 παρτέρια)

(β) Για 100 παρτέρια λουλουδιών θα χρειαστούν 2+100·4=402 πλάκες.

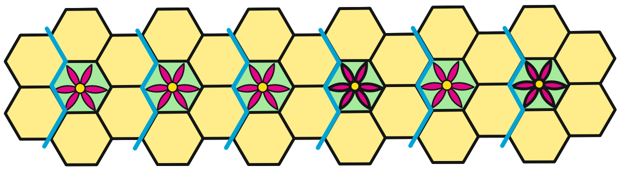
(γ) Ο ζητούμενος κανόνας μπορεί να διατυπωθεί με τον ακόλουθο τρόπο: για να βρίσκουμε κάθε φορά τον αριθμό των πλακών σε οποιοδήποτε όρο, ξεκινάμε με δύο πλάκες, και προσθέτουμε τον αριθμό του όρου πολλαπλασιασμένο επί 4. Συντομότερα μπορούμε να γράψουμε:

Αριθμός πλακών=2+(αριθμός του όρου)×4.

Επομένως, ο γενικός τύπος που μπορούν να χρησιμοποιούν οι κηπουροί για να αποφασίζουν κάθε φορά ποιος είναι ο απαιτούμενος αριθμός εξαγωνικών πλακών για ν παρτέρια είναι ο εξής : **2+ ν ·4 πλάκες**.

Η προηγούμενη στρατηγική παρατηρήθηκε σε δύο ομάδες μαθητών. Επιπλέον, προτάθηκε από άλλους μαθητές στη γενική συζήτηση. Η στρατηγική αυτή ονομάζεται στρατηγική δόμησης γενικεύσεων (Rivera & Becker, 2008).

$2+4\cdot 6=26$



$2+4\cdot\nu$

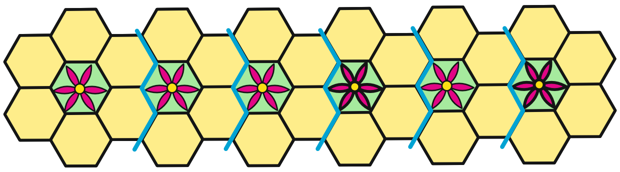
6ος Όρος (6 παρτέρια)

Η προηγούμενη λύση προσέφερε έναν πολύτιμο τρόπο για την ανάπτυξη του εικονιστικού συλλογισμού και ανέπτυξε πλούσια εννοιολογική κατανόηση των συναρτησιακών σχέσεων (Bennett, 1988; Tanisli, 2011; Walkowiak, 2014).

2. Η στρατηγική 6+4·(ν-1)

Η στρατηγική αυτή είναι παρόμοια με την προηγούμενη και εμφανίστηκε σε 3 ομάδες μαθητών. Η στρατηγική αυτή είναι επίσης στρατηγική δόμησης (Rivera & Becker, 2008). Οι μαθητές παρατηρούν το αρχικό σχήμα ($4^{ος}$ όρος) με τις 18 εξαγωνικές πλάκες. Σχεδιάζουν τον $6^{ο}$ όρο του μοτίβου με τις 26 πλάκες. Διαπιστώνουν ότι η μετάβαση από έναν όρο στον αμέσως επόμενο προσθέτει 4 πλάκες στο νέο παρτέρι.

$6+4\cdot(6-1)=26$



$6+4\cdot(\nu-1)$

6ος Όρος (6 παρτέρια)

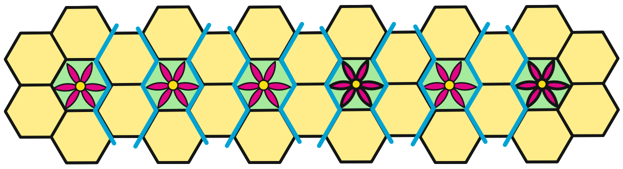
Οι μαθητές από ένα «δείγμα» λίγων παραδειγμάτων ανακάλυψαν τη λύση για το σχήμα 6, πέρασαν στο σχήμα 100 και τέλος βρήκαν τον κανόνα για τη γενίκευση της λύσης: 6+4·(ν-1).

Στο τέλος ο εκπαιδευτικός ασχολήθηκε με την ισοδυναμία των δύο προηγούμενων στρατηγικών. Στην έκφραση 4ν+2 οι όροι 4ν και 2 παριστάνουν μια μεταβαλλόμενη και μια σταθερή ποσότητα, αντιστοίχως και αυτή η αλγεβρική παράσταση δεν μπορεί να απλοποιηθεί άλλο. Αυτή η ιδιαιτερότητα των αλγεβρικών παραστάσεων δεν ήταν γνώριμη στους μαθητές και αποτέλεσε πηγή παρανοήσεων.

3. Η στρατηγική: 6ν-2·(ν-1)

Πρόκειται για μια στρατηγική αποδόμησης γενικεύσεων (Rivera & Becker, 2008). Οι μαθητές γενικεύουν με βάση τις διαθέσιμες ενδείξεις σε ένα σχήμα που αποτελείται από επικαλυπτόμενες μορφές ή μέρη. Στην ειδική περίπτωση των 6 παρτεριών, απαιτείται η συνδυαστική διαδικασία πρόσθεσης-αφαίρεσης με απομάκρυνση των πέντε αλληλεπικαλυπτόμενων πλακών του ακόλουθου σχήματος.

$6 \cdot 6 - 2 \cdot (6-1) = 26 \quad 6 \cdot \nu - 2 \cdot (\nu - 1)$



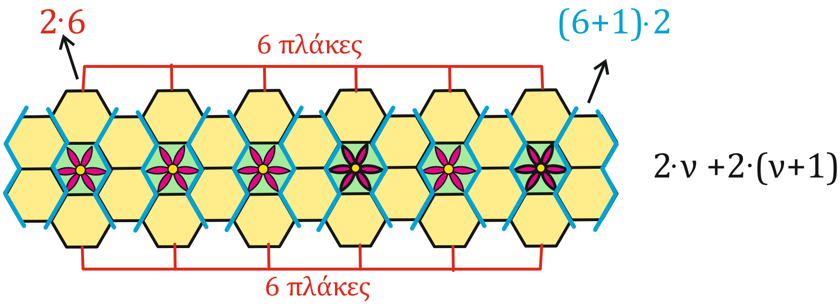
6ος Όρος (6 παρτέρια)

Η στρατηγική αυτή δεν παρατηρήθηκε στην τάξη. Όμως μετά το τέλος του μαθήματος με πλησιάσει μια μαθήτρια και μου έδωσε την προηγούμενη λύση. «*Αφού κάθε παρτέρι έχει 6 πλάκες γύρω του, τα 6 παρτέρια θα έχουν 36 πλάκες. Όμως τις πλάκες που είναι στη μέση του παρτεριού τις μετρήσαμε δύο φορές. Όλες οι πλάκες που είναι στις μέσες του παρτεριού έχουν από δύο πλάκες και όλα αυτά τα ζευγάρια που είναι στη μέση είναι 5, δηλαδή ένα λιγότερο από το 6 που είναι ο αριθμός των παρτεριών. Τελικά αν αφαιρέσουμε τις 10 μεσαίους βγαίνουν 26 πλάκες για τα 6 παρτέρια. Οπότε νομίζω θα είναι…*» Ουσιαστικά η μαθήτρια περιέγραψε τη στρατηγική 6ν-2(ν-1) και ήταν καταχαρούμενη από την ανακάλυψή της. Η προηγούμενη στρατηγική συνιστά μια θαυμάσια επινόηση της μαθήτριας. Ποτέ δε διδάχτηκε η στρατηγική που εφευρέθηκε. Μάλιστα πλεονεκτεί από άλλες στρατηγικές, γιατί είναι πρωτότυπη και απλή.

4. Η στρατηγική: 2ν+2·(ν+1)

Τέλος αξίζει να μνημονευτεί μια ακόμα στρατηγική δόμησης γενικεύσεων η οποία δεν παρατηρήθηκε στην τάξη, αλλά αναφέρθηκε στη μεταδιδακτική συζήτηση της ομάδας των μαθηματικών της σχολικής μονάδας.

$2 \cdot 6 + 2 \cdot (6+1) = 26$ πλάκες



6ος Όρος (6 παρτέρια)

Η κανονικότητα μπορεί να σχηματιστεί από δύο οριζόντιες γραμμές, πάνω και κάτω, στις οποίες οι εξαγωνικές πλάκες προεξέχουν με την προσθήκη των καθέτων ζευγών. Ο κανόνας που προκύπτει είναι ο ακόλουθος: 2ν+2(ν+1).

5. Η ανεπιτυχείς στρατηγικές

Ο παρατηρήσεις της ομαδικής δραστηριότητας στην τάξη δείχνουν ότι ένας μικρός αριθμός μαθητών είχε δυσκολίες στην επιτυχή λύση του προβλήματος. Μεταξύ άλλων παρατηρήθηκαν ανεπιτυχείς στρατηγικές δοκιμής και πλάνης, απλοϊκές επαγωγές, ανακρίβειες στις αριθμητικές πράξεις και εσφαλμένη χρήση του αναλογικού συλλογισμού. Ορισμένοι μαθητές δυσκολεύονται να διακρίνουν αναλογικές και μη αναλογικές καταστάσεις γι' αυτό συχνά χρησιμοποιούν αναλογικές στρατηγικές για να λύνουν μη αναλογικά προβλήματα. Ο αναλογικός συλλογισμός και οι αναλογικές σχέσεις έχουν ριζώσει με τη δύναμη της συνήθειας και της εμπειρίας.

Ορισμένοι μαθητές είχαν την τάση να χρησιμοποιούν αναδρομικές στρατηγικές, ενώ επέδειξαν περιορισμένη ικανότητα στην αναγνώριση και την περιγραφή των γενικεύσεων καθώς και στην εξήγηση του γενικού κανόνα της ακολουθίας. Έστρεψαν την προσοχή τους στη μεταβολή του ενός συνόλου δεδομένων (προσθέτουμε 3 πλάκες για κάθε νέο παρτέρι) παρά στη σχέση ανάμεσα στα δύο σύνολα δεδομένων (για να μπορούν να βρίσκουν τον αριθμό των πλακών για κάθε αριθμό παρτεριών). Παρότι η αναδρομική προσέγγιση επιτρέπει στους μαθητές να προβλέπουν τα στοιχεία του επόμενου ζεύγους της ακολουθίας, δεν προωθεί την ικανότητα να αντιλαμβάνονται τη σχέση μεταξύ των δύο συνόλων δεδομένων για να βρίσκουν τον υποκείμενο συναρτησιακό κανόνα, τον οποίο πολλοί ερευνητές θεωρούν θεμελιώδη για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών (Kieran, 1992).

Η αναδρομική σκέψη αποτελεί ζωτικό μέρος του αλγεβρικού συλλογισμού των μαθητών. Είναι το σημείο εκκίνησης για να μάθουμε πώς παράγουμε το γενικό τύπο. Αποτελεί μια νοητική συνήθεια, η οποία περιέχει βήματα ακολουθιακής αλλαγής. Καθώς οι μαθητές μετρούν ανά 4 παραλείποντας αριθμούς ακολουθούν αναδρομικό συλλογισμό:

6, 10, 14, 18, 22, 26, …

Η αναδρομική σκέψη μπορεί να καλλιεργηθεί με ακολουθίες κανονικοτήτων. Αναμένεται οι μαθητές να αναπτύξουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό και να κάνουν γενικεύσεις καθώς και να διατυπώνουν και να αναλύουν εικασίες.

Ο αναδρομικός κανόνας παρέχει μια ισχυρή σύνδεση με την έννοια της κλίσης (περιγράφει την αύξηση του αριθμού των εξαγωνικών πλακών καθώς αυξάνει ο αριθμός των παρτεριών κατά 1), αλλά για πολλά παρτέρια αυτή η στρατηγική δεν είναι τόσο αποτελεσματική όσο η στρατηγική του γενικού κανόνα. Αυτή η στρατηγική μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη ενός γενικού κανόνα εάν ο μαθητής μπορεί να συνδέει τον αριθμό των φορών που προσθέτει 4 και τον αριθμό των εξαγωνικών πλακών.

Η αξιολόγηση της πειραματικής διδασκαλίας

Μετά τη διεξαγωγή της διδασκαλίας ακολούθησε γόνιμη συζήτηση μεταξύ των εκπαιδευτικών που παρακολούθησαν τη διδασκαλία και του σχολικού συμβούλου.

Επιπλέον, η διερεύνηση των στάσεων των μαθητών για την πειραματική διδασκαλία έγινε την επόμενη ημέρα από την καθηγήτρια της τάξης με την συμπλήρωση ενός μικρού ερωτηματολογίου στο οποίο οι μαθητές εξέφρασαν τις αναμνήσεις, τα συναισθήματα και τις σκέψεις τους. Ο μέσος βαθμός συμφωνίας των μαθητών φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας βαθμολόγησης όψεων της διδασκαλίας από τους μαθητές

Πόσο ευχαριστημένοι είστε από:	**Κλ. 0-4**
1. Το ενδιαφέρον του μαθήματος που παρακολουθήσατε	3,7
2. Την επεξήγηση των δύσκολων σημείων του μαθήματος	3,8
3. Την ενθάρρυνση που σας παρείχε ο εκπαιδευτικός κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας	3,4
4. Τις ευκαιρίες να συμμετάσχετε στο μάθημα	3,8
5. Την ατμόσφαιρα που υπήρχε κατά τη διάρκεια του μαθήματος	3,8
6. Το φόρτο εργασίας που σας ανατέθηκε για το επόμενο μάθημα	3,6

Στον πίνακα παρατίθεται συγκριτικά ο μέσος βαθμός συμφωνίας των μαθητών του δείγματος για την προαναφερόμενη ομάδα ερωτήσεων που εκφράζει τη συμφωνία ή τη διαφωνία με τη στάση/άποψη που περιγράφει η εκάστοτε ερώτηση και αφορά την ευχαρίστηση των μαθητών από την πειραματική διδασκαλία. Από τον προηγούμενο πίνακα, είναι εμφανές ότι οι απαντήσεις των μαθητών κινούνται σε πολύ υψηλά επίπεδα συμφωνίας εφόσον για όλες τις απαντήσεις των μαθητών ο μέσος όρος συμφωνίας κυμαίνεται αριθμητικά από 3,4 έως 3,8 με ανώτατο όριο το 4.

Στην ερώτηση «*τι κατά τη γνώμη σας ήταν το πιο ανιαρό;*» όλοι οι μαθητές απάντησαν ότι δεν υπήρχε κάτι ανιαρό και ότι όλα ήταν ενδιαφέροντα. Ενδεικτικές απαντήσεις:

- *Δεν υπήρχε κάτι ιδιαίτερα βαρετό. Όλο το μάθημα ήταν ευχάριστο.*
- *Κατά τη γνώμη μου όλα ήταν τέλεια.*

Στην ερώτηση «*τι κατά τη γνώμη σας ήταν το πιο ευχάριστο κατά τη διάρκεια του μαθήματος;*» ορισμένες ενδεικτικές απαντήσεις είναι οι εξής:

- *Το πιο ευχάριστο κατά τη διάρκεια του μαθήματος ήταν ότι μας δόθηκε η ευκαιρία να δουλέψουμε σε ομάδες και να συνεργαστούμε για την επίλυση του προβλήματος.*
- *Περισσότερο μου άρεσε ότι κάναμε μαζί μια εργασία πάνω σε ένα μεγάλο χαρτόνι.*
- *Το πιο ευχάριστο ήταν η στιγμή που οι ομάδες σηκώθηκαν και εξήγησαν τον τρόπο σκέψης τους με τον οποίο έλυσαν το πρόβλημα.*
- *Το πιο ευχάριστο ήταν η παρουσίαση των ιδεών όλων των συμμαθητών μου. Δεν φανταζόμουνα ότι θα ήταν δυνατόν να υπάρχουν περισσότεροι από έναν τρόποι.*
- *Όλα ήταν πολύ ευχάριστα και η ατμόσφαιρα που επικρατούσε ήταν πολύ καλή. Γενικότερα ήταν ευχάριστο που δουλέψαμε και συνεργαστήκαμε όλοι μαζί και βγάλαμε ένα πολύ όμορφο αποτέλεσμα.*

Αναμφίβολα η πειραματική διδασκαλία ήταν πηγή έκπληξης και χαράς για τους μικρούς μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Πέτυχε να εμπλέξει συλλογικά και ατομικά όλους τους μαθητές στη δραστηριότητα της κανονικότητας, η οποία δεν ήταν καθόλου βαρετή. Συναισθηματικοί παράγοντες των μαθητών, όπως οι στάσεις και οι συγκινήσεις, οι αυτοεικόνες και οι ετεροεικόνες, τα κίνητρα και οι προσδοκίες, οι πεποιθήσεις και οι αξίες είναι εξίσου σημαντικοί με τη μάθηση του γνωστικού αντικειμένου και επηρέασαν την επιτυχή λύση του προβλήματος. Το ευχάριστο ξάφνιασμα από την ασυνήθιστη εργασία σε ομάδες, η αίσθηση της περιέργειας από τη συνεργασία για τη γραφή της λύσης στη συλλογική αφίσα και η έκπληξη των μαθητών όταν διαπίστωσαν ότι ο κανόνας δεν εκφράζεται με μοναδικό τρόπο, αποκάλυψαν τα γνωρίσματα της χαράς, του θαυμασμού, της διασκέδασης και της ικανοποίησης. Καθώς οι μαθητές του Γυμνασίου χαίρονται και βιώνουν το αίσθημα της κοινής επιτυχίας, εμπλέκονται υπαρξιακά και συναισθηματικά (Κόσυβας, 2010). Θα πρέπει να τονιστεί ότι η διδασκαλία αποτελεί ένα πολύπλοκο φαινόμενο, το οποίο δύσκολα μπορεί να ερευνηθεί με πληρότητα (Potari & Jaworski, 2002). Η μελέτη της παρουσιάζει επιπρόσθετες δυσκολίες όταν οργανώνεται σύμφωνα με την ομαδοσυνεργατική μέθοδο.

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή παρουσιάσαμε τα ευρήματα από την ομαδοσυνεργατική διερεύνηση και επίλυση του προβλήματος των παρτεριών λουλουδιών στην Α΄ Γυμνασίου. Το εν λόγω πρόβλημα ήταν μια ενδιαφέρουσα δραστηριότητα εισαγωγής των μαθητών στην άλγεβρα. Το πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν το πρόβλημα, να εμπλακούν ολόπλευρα στις μαθηματικές ανακαλύψεις της τάξης τους και να σχηματίσουν ποικίλες αναπαραστάσεις. Χωρίς να έχουν διδαχθεί ακόμα τυπικές αλγεβρικές γνώσεις κατάφεραν να εξερευνήσουν την εικονιστική κανονικότητα, να διατυπώσουν εικασίες και να φτάσουν στη γενίκευση και τη μαθηματική μοντελοποίηση. Το πλαίσιο του προβλήματος διευκόλυνε τη μάθηση των αλγεβρικών εννοιών και παρείχε ευκαιρίες για την ενίσχυση της κατανόησης και του προσωπικού στοχασμού.

Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης φανερώνουν ότι όλες οι ομάδες των μαθητών ενεπλάκησαν στο πρόβλημα της εικονιστικής κανονικότητας που τούς ανατέθηκε δίνοντας καθεμιά τη δική της δημιουργική εκδοχή. Η εξοικείωση των μαθητών με την κανονικότητα ήταν σημαντική για την κατανόηση των αριθμών, τη λύση προβλήματος και τη μάθηση της άλγεβρας. Η γενίκευση των αριθμητικών καταστάσεων έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν σε συζητήσεις πάνω σε σημαντικές μαθηματικές ιδέες. Όπως διαπιστώσαμε στο πρόβλημα με την κανονικότητα των παρτεριών λουλουδιών προέκυψε η ανάγκη οι μαθητές να διατυπώσουν και να ελέγξουν εικασίες. Επιπλέον, η προβληματική κατάσταση γέννησε εναλλακτικές αλγεβρικές εκφράσεις. Οι μαθητές, οπτικοποιώντας την κανονικότητα με διαφορετικούς τρόπους και γράφοντας τις αντίστοιχες αλγεβρικές σχέσεις κατανόησαν τη φύση της μεταβλητής ως δυναμικής ποσότητας και εξοικειώθηκαν με τη δομή των αλγεβρικών παραστάσεων. Η γεωμετρία τροφοδότησε τον αριθμητικό χειρισμό και την αλγεβρική σκέψη. Το πλαίσιο του προβλήματος παρείχε μια γεφύρωση ανάμεσα στη γεωμετρία και την αριθμητική με την άλγεβρα, ανάμεσα στο συγκεκριμένο και το αφηρημένο, επιτρέποντας τους μαθητές να εισαχθούν σε αλγεβρικές έννοιες με περισσότερο κατανοητό τρόπο.

Η λεπτομερής ανάλυση των λύσεων των μαθητών στο εν λόγω πρόβλημα αποκάλυψε τρεις στρατηγικές αλγεβρικής γενίκευσης: δύο *δόμησης και μία αποδόμησης*. Ανάλογες στρατηγικές έχουν αναπτυχθεί από τους Rivera και Becker (2008) στη γενίκευση ανάλογων γραμμικών προβλημάτων και διαπιστώσαμε ότι είναι εφαρμόσιμες και στη γενίκευση του προβλήματος που ανατέθηκε στους μαθητές. Στις γενικεύσεις τους οι μαθητές χρησιμοποίησαν άτυπα σύμβολα, αριθμητικές παραστάσεις, λεκτικές περιγραφές και τυπικό αλγεβρικό συμβολισμό. Οι παρατηρήσεις μας από τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης δείχνουν ότι οι περισσότεροι μαθητές ήταν σε θέση να βρίσκουν τον κανόνα στο πρόβλημα της κανονικότητας και να προχωρούν στη γενίκευση με χρήση καθημερινής γλώσσας ή αλγεβρικών τύπων. Όλοι οι μαθητές μετείχαν στη μαθηματική συζήτηση της τάξης και κατανοούσαν τις διαφορετικές λύσεις και τα επιχειρήματα των συμμαθητών τους. Ωστόσο, όπως έδειξαν οι συλλογικές εργασίες και η διερεύνηση του προβλήματος στο εσωτερικό των ομάδων μια μειονότητα μαθητών χρησιμοποίησε ανεπιτυχή αναλογικό συλλογισμό, στρατηγικές δοκιμής και πλάνης, αιτιολογήσεις μέσω της χρήσης παραδειγμάτων και απλοϊκές επαγωγές. Επίσης σε λίγες περιπτώσεις παρατηρήθηκαν στρατηγικές αριθμητικής γενίκευσης, ενώ η μετεξέλιξή τους προς αλγεβρικές στρατηγικές γενίκευσης ήταν περιορισμένη.

Σύμφωνα με τα ευρήματά μας οι παράγοντες που επηρέασαν την υιοθέτηση στρατηγικών γενίκευσης από τους μαθητές είναι οι ακόλουθοι: Πρώτον, η πολύπτυχη ικανότητα των μαθητών να διακρίνουν δομές και σχέσεις. Οι εν λόγω μαθητές της Α΄ Γυμνασίου είχαν συμμετάσχει σε επιτυχείς πανελλήνιες εξετάσεις για την εισαγωγή τους στα ΠΠ Γυμνάσια και πολλοί από αυτούς διακρίνονταν για τις μαθηματικές τους ικανότητες. Η αναγνώριση της αναδρομικότητας ήταν ένας στόχος που κατακτήθηκε από όλους τους μαθητές. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις μας οι περισσότεροι μαθητές ήταν σε θέση να αναπτύσσουν μια επιτυχή διαδικασία επαγωγικής γενίκευσης και έκφρασης του κανόνα με αλγεβρικά σύμβολα. Δεύτερον, η πρότερη γνώση. Η ικανότητα αξιοποίησης της προϋπάρχουσας γνώσης, όπως προβλήματα με μοτίβα που είχαν συναντήσει στο Δημοτικό Σχολείο και η ενσωμάτωσή τους στην νέα κατάσταση διευκόλυνε τους μαθητές στην αλγεβρική γενίκευση. Οι πρότερες άτυπες εμπειρίες των μαθητών από την προηγούμενη διδασκαλία ήταν μια πολύτιμη διδακτική συνιστώσα που διαμόρφωσε τις ομαδικές διερευνήσεις, τις μαθηματικές αλληλεπιδράσεις της τάξης και τη γενικότερη μαθησιακή ατμόσφαιρα. Τα καθημερινά βιώματα των μαθητών τροφοδότησαν τα μαθηματικά νοήματα κατά τις διαδικασίες επίλυσης του προβλήματος. Τρίτον, διαπιστώθηκε ο σχηματισμός αριθμητικών γενικεύσεων ως αποτέλεσμα χρήσης ευρετικών από τους μαθητές καθώς εργάζονταν με απλούστερες περιπτώσεις.

Η εμπλοκή των μαθητών στη λύση του προβλήματος ευνόησε την ικανότητα γενίκευσης. Οι μαθητές από ένα επαρκές πλήθος όρων βρήκαν τον κανόνα σχηματισμού όλων των όρων προβλέποντας το πλήθος των εξαγωνικών πλακών για οποιονδήποτε αριθμό παρτεριών. Η αλγεβρική γενίκευση από ένα πεπερασμένο δείγμα ειδικών περιπτώσεων, η διόραση της κανονικότητας και η διατύπωση ενός κανόνα είναι μια θεμελιώδης μαθηματική δραστηριότητα που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των κανονικοτήτων. Η χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων έδωσε σε ορισμένους μαθητές τις απαραίτητες ειδικές περιπτώσεις, οι οποίες διευκόλυναν την ανάδυση δομών και σχέσεων. Η εν λόγω δραστηριότητα παρείχε στους περισσότερους μαθητές ευκαιρίες αναζήτησης, εξερεύνησης και επέκτασης της κανονικότητας καθώς και διατύπωσης γενικεύσεων που εκφράστηκαν με λέξεις, αλγεβρικά σύμβολα και γεωμετρικά μοντέλα.

Τα Μαθηματικά θεωρούνται ως η επιστήμη των κανονικοτήτων και της τάξης (Steen, 1988 – Devlin, 1994; Radford, 2008). Οι κανονικότητες είναι η καρδιά των Μαθηματικών. Ειδικότερα, οι εικονιστικές κανονικότητες αποτελούν ισχυρά εργαλεία παρακίνησης των μαθητών προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης της αλγεβρικής τους σκέψης με την γόνιμη αξιοποίηση εποπτικού συλλογισμού. Ωστόσο, στα σχολικά μαθηματικά προεξάρχει η παραδοσιακή τυπική άλγεβρα με τις αφηρημένες προσεγγίσεις στη διδασκαλία της. Σε αντίθεση προς την επίλυση των εξισώσεων ή το χειρισμό των προσημασμένων αριθμών, η εξερεύνηση των κανονικοτήτων απουσιάζει από τα κανονικά βιβλία του Γυμνασίου. Εξαίρεση αποτελεί το Νέο ΠΣΜ του Γυμνασίου και ο αντίστοιχος Οδηγός Εκπαιδευτικού. Πάντως και σε αυτήν την περίπτωση οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί θεωρούν τις δραστηριότητες των κανονικοτήτων απλώς ως στοιχείο εμπλουτισμού και όχι βασικό γνώρισμα του ΠΣΜ. Έχουμε την άποψη ότι «*η άλγεβρα και όλα σχεδόν τα Μαθηματικά είναι γενίκευση κανονικοτήτων*» (Lee, 1996, σ. 103). Ως εκ τούτου, πιστεύουμε ότι είναι σημαντικό σε μια μελέτη των Μαθηματικών να κατευθύνουμε την προσοχή των μαθητών στις εικονιστικές κανονικότητες που διέπουν μια ευρεία ποικιλία μαθηματικών θεμάτων και βοηθούν τους μαθητές να δίνουν νόημα στα αλγεβρικά σύμβολα που χρησιμοποιούν, παρέχοντας ευκαιρίες για τη βαθύτερη κατανόηση των συναρτησιακών σχέσεων και την ανάπτυξη της διορατικότητας των μαθητών για τη γενίκευση των κανόνων. Η στενότητα της παραδοσιακής έμφασης στις αφηρημένες, συμβολικές όψεις της άλγεβρας θα πρέπει να δώσει τη θέση της σε νέες προσεγγίσεις εισαγωγής στην αλγεβρική σκέψη, στις οποίες προεξάρχουν προβληματικές καταστάσεις με εικονιστικές κανονικότητες. Αν επιθυμούμε να προωθήσουμε μια ισχυρή αλγεβρική σκέψη στους μαθητές μας, θα πρέπει να ενθαρρύνουμε μια ποικιλία αιτιολογημένων γενικεύσεων της κανονικότητας. Η διαμόρφωση μιας νέας προσεκτικής ισορροπίας αποτελεί σύγχρονη παιδαγωγική πρόκληση για τη διδασκαλία της σχολικής άλγεβρας.

Αναφορές

Bennett, A. (1988). Visual thinking and number relationships. *Mathematics Teacher*, 81(4), 267–272.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: W.H. Freeman.

Fann, K. T. (1970). Peirce's theory of abduction. The Hague: Martinus Nijhoff.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, 78(5), 361-367.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D, & Threlfall, J. (1998). Children's strategies with number patterns. *Educational Studies*, 24, 315-331.

Ishida, J. (1997). The teaching of general solution methods to pattern finding problems through focusing on an evaluation and improvement process, *School Science and Mathematics* 97(3), 155–162.

Kieran, C. (1992). The learning and Teaching of School Algebra. In D.A. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age.

Kosyvas, G. (2010). Problèmes ouvertes: notion, catégories et difficultés, *Annales de Didactique et des Sciences cognitives*, 15, IREM de Strasbourg, 43-71.

Kosyvas, G. (2013a): Originality and beauty of arithmetic reasoning. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1-2), 23-37.

Kosyvas, G. (2013b). Pratiques pédagogiques de problèmes ouverts dans un collège expérimental à Athènes**,** *Repères-IREM, 91*, 25-50.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231–258.

Lannin, J.K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Algebraic generalization strategies: Factors influencing student strategy use. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3-28.

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalisation Activities. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (eds.), *Approaches to Algebra Perspectives for Research and Teaching* (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lee*,* L*.* *&* Freiman*,* V*.* *(2006).* Developing Algebraic Thinking Through Pattern Exploration*. Mathematics Teaching* in the *Middle School,* 11(9), *428*- 433.

Mason, J. (2002). Generalisation and algebra: Exploiting children's powers. In Haggarty, L. (ed) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: Perspectives on Practice* (pp. 105-120): Routledge Falmer and the Open University.

Mason, J., Graham, A., Pirnm, D. & Gowar, N. (1985). *Routes to /Roots of Algebra.* Milton Keynes: The Open University Press.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33–49.

Orton, J., Orton, A. & Roper, T. (1999). Pictorial and Practical Contexts and the Perception of Pattern. In A. Orton (ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 121 - 136). London: Cassell.

Potari, D. & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(4), 351-380.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education,* 40, 83-96.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Mathematical Behavior,* 26, 140-155.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40,* 65-82.

Rivera, F. D. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher*, 101(1), 69–75.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 297–328.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising problems. *Educational Studies in Mathematics,* 20, 147- 164.

Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns. *Science*, 240, 611-616.

Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 206–223.

Thompson, P. W. (2013). *In the absence of meaning*. In K. Leatham (Ed.), Vital directions for research in mathematics education. New York: Springer

van den Kieboom, L.A., & Magiera, M.T. (2012). Cultivating teachers' reasoning and sense making. *Mathematics Teaching in the Middle School. 17* (6), 352-357.

Walkowiak, T. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 56–71.

Warren, E. & Cooper T. (2007). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67(2)*, 171- 185.

Wittmann, M., Flood, V., Black, K. (2013). Algebraic manipulation as motion within a landscape. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 169-181.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.

Βερύκιος, Π. (2011). Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών εννοιών της Σχολικής *Άλγεβρας σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος*. Στο: *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*. Επιστημονική ένωση για τη διδακτική των Μαθηματικών (σσ. 9-50). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Δραμαλίδης, Α. & Σακονίδης, Χ. (2006). Η επίδοση μαθητών ηλικίας 12-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 11, 100-114.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

Κόσυβας, Γ. (2009α). Διδακτικές-μαθησιακές διαδρομές βασισμένες στη διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών. *Το Φ, 6,* 133-160, Αθήνα.

Κόσυβας, Γ. (2009β). Στρατηγικές γενίκευσης των μαθητών από γεωμετρικές κανονικότητες, *Πρακτικά του 26ου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, 405-415, Θεσσαλονίκη: ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2010). Η παιδαγωγική της έκπληξης με μαθηματικά παράδοξα στο Λύκειο, *Πρακτικά 27ου συνεδρίου της ΕΜΕ,* 584-601. Χαλκίδα: ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2011). Η άτυπη μοντελοποίηση του προβλήματος των χειραψιών, *Πρακτικά 28ου συνεδρίου της ΕΜΕ*, 281-306, Αθήνα: ΕΜΕ.

Ευχαριστούμε τους εκπαιδευτικούς κλ. ΠΕ3 του 2ου ΠΠ Γυμνασίου Αθηνών για την εποικοδομητική συνεργασία με σκοπό την πραγματοποίηση της πειραματικής διδασκαλίας, στοιχεία της οποίας παρουσιάσαμε σε αυτή την εργασία.